

INSTABILIDADE ELASTODINÂMICA DE UMA VIGA
SOB AÇÃO DE UM MOMENTO AXIAL PERIÓDICO

JORGE LEDO LARANGEIRA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA
A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por

Presidente

Luiz Buitrago
Paulo Henrique de Faria
João Paulo Riff

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

DEZEMBRO DE 1971

à SÔNIA

A G R A D E C I M E N T O S

À CAPES, COPPE/UFRJ, NCE/UFRJ, UFRGS e UFSM.

Aos professores Peter Hagedorn (atualmente na Universidade de Karlsruhe, Alemanha) e Luiz Bevilacqua que, sucessivamente, me orientaram neste trabalho.

A meus pais, a Hugo e Clara, à Geraldine.

À Sônia, pelo apoio e compreensão de sempre.

S I N O P S E

Nêste trabalho é analisado o problema da instabilidade elastodinâmica de uma viga de Bernoulli-Euler uniforme, sob ação de um momento axial periódico aplicado em uma de suas extremidades.

As equações de movimento, estabelecidas pelo Princípio de Hamilton, são integradas pelo método de Galerkin, resultando em dois sistemas de equações diferenciais de Mathieu-Hill em termos de coordenadas generalizadas.

As soluções triviais dêstes sistemas determinam as regiões de ressonância paramétrica das vibrações flexionais da viga como funções de suas frequências naturais e dos parâmetros de excitação.

São apresentados alguns resultados numéricos relativos ao problema.

A B S T R A C T

The problem of the elastodynamic instability of a uniform Bernoulli-Euler beam subject to an axial periodic torque applied in one of its extremities is analyzed.

Equations of motion, established via Hamilton Principle, are integrated by Galerkin method, resulting in two systems of Mathieu-Hill differential equations in terms of generalized coordinates.

The trivial solutions of these systems determine the regions of parametric resonance of flexural vibrations of beam as functions of their natural frequencies and excitation parameters.

Some numerical results related to the problem are presented.

Í N D I C E

SINOPSE	IV
ABSTRACT	V
INTRODUÇÃO	1
CAP. I - ESTABELECIMENTO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA VIGA	
1.1. Hipóteses	7
1.2. Obtenção das Equações de Movimento pelo Princípio de Hamilton	8
1.3. Determinação dos momentos torçores ao longo da viga	20
1.3.1. Viga engastada à torção	22
1.3.2. Viga livre à torção	23
1.4. Considerações sobre as equações obtidas .	29
CAP. II - INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	
2.1. Viga bi-engastada à flexão e engastada à torção	32
2.2. Viga bi-engastada à flexão e livre à torção	40

2.3. Viga bi-rotulada à flexão e engastada à torção	46
2.4. Considerações sobre as equações obtidas .	53

CAP. III - INSTABILIDADE E RESSONÂNCIAS PARAMÉTRICAS DA VIGA

3.1. Instabilidade das soluções de sistemas de equações de Mathieu	60
3.1.1. Soluções estáveis	62
3.1.2. Soluções instáveis	66
3.2. Instabilidade das soluções de sistemas de equações de Hill	77
3.3. Aplicação das condições de instabilidade aos problemas em estudo ...	82

CAP. IV - ALGUNS RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1. Determinação numérica das regiões de instabilidade	88
4.2. Determinação dos comprimentos críticos da viga	103

LISTA DE SÍMBOLOS	118
-------------------------	-----

BIBLIOGRAFIA	121
--------------------	-----

I N T R O D U Ç Ã O

Na Teoria da Estabilidade Elastodinâmica são estudados os problemas relacionados à estabilidade de corpos elásticos sob ação de carregamentos pulsantes que, por atuarem de uma forma especial sobre esses corpos, recebem a denominação de carregamentos paramétricos. Por serem tais carregamentos variáveis com o tempo, produzem vibrações e a instabilidade elastodinâmica se manifesta quando ocorre uma tendência para o aumento ilimitado das amplitudes dessas vibrações.

Em 1924, BELIAEV¹ publicou o que pode ser considerado o primeiro trabalho sobre este assunto. Trata ele de um problema hoje clássico e que ilustra satisfatoriamente as idéias acima expostas.

Com efeito, suponha-se inicialmente uma haste esbelta rotulada em ambas as extremidades à qual se aplica uma força axial estática P . Como é sabido, para valores críticos $P_{cr}^{(n)}$ ocorre flambagem na haste.

Consideremos agora o caso do esforço axial dado por $P(t) = P \cos \Omega t$, com $P < P_{cr}^{(1)}$.

Nessas condições, de um modo geral, a haste experimentará somente vibrações longitudinais. Suponha-se agora, que devido a uma perturbação qualquer, a haste assuma também vibrações transversais. Em geral essas vibrações terão amplitudes limitadas.

Entretanto foi demonstrado, tanto analítica como experimentalmente, que para determinadas relações entre a frequência de excitação Ω e as frequências naturais ω das vibrações transversais da haste, esta se torna dinamicamente instável, isto é, as amplitudes das vibrações transversais tendem a crescer de modo rápido e ilimitado, caracterizando-se assim um fenômeno tipicamente ressonante.

Poderiam ser citados inúmeros outros exemplos de instabilidade elastodinâmica ocorrentes em vigas, colunas, arcos, anéis, placas e cascas. Conforme observa BOLOTIN³, sempre que um carregamento estático de um determinado tipo puder causar instabilidade estática, o carregamento pulsante correspondente poderá ocasionar instabilidade dinâmica.

Vamos agora destacar algumas peculiaridades interessantes das vibrações tratadas, que as tornam, inclusive, bastante distintas das vibrações forçadas:

1º) A equação de movimento que as rege é homogênea.

Assim, a excitação é nela representada por coeficientes (evidentemente funções do tempo) de um ou mais termos à esquerda do sinal de igualdade. Daí a denominação - carregamentos paramétricos - usual na bibliografia sobre o tema. Entretanto, segundo BOLOTIN³, "seria mais correto falar não em carregamentos paramétricos em geral, mas em carregamentos que são paramétricos em relação a certas formas de deformações". Por exemplo, no caso mencionado anteriormente, a força axial pulsante é uma excitação paramétrica em relação às vibrações transversais, mas é simplesmente uma excitação forçada em relação às vibrações longitudinais da haste.

2º) Contrariamente às vibrações forçadas, as oscilações paramétricas podem ocorrer em direções normais à excitação, como se viu no exemplo anterior. Ainda como exemplo, neste trabalho, o carregamento paramétrico é um momento torçor axial, que, no entanto, produz vibrações paramétricas flexionais.

3º) Em contraste com as vibrações forçadas, que são ressonantes apenas para frequências de excitação iguais aos valores (discretos) das frequências naturais, independentemente da amplitude do carregamento, as oscilações paramétricas serão ressonantes para "faixas" de frequências de excitação, faixas essas tanto mais largas quanto maior o carregamento. Para valores suficientemente pequenos da amplitude

do carregamento, essas faixas localizam-se simetricamente em torno de valores múltiplos ou fracionários de cada uma das frequências naturais ou de combinações lineares destas.

4º) Um fato que parece paradoxal é que o amortecimento pode ampliar as mencionadas faixas de ressonância, tendo então, um efeito desestabilizante.

* * *

Em 1949 METTLER¹⁶ formulou uma teoria geral para a Estabilidade Elastodinâmica, da qual vamos, a seguir, comentar sucintamente alguns de seus tópicos que mais se relacionam com o trabalho que vamos desenvolver nos próximos capítulos.

O objetivo final dessa teoria é discutir a estabilidade das soluções de um sistema de equações diferenciais lineares do tipo MATHIEU-HILL, soluções essas que são as coordenadas generalizadas associadas às vibrações do corpo elástico.

Tendo em vista esse objetivo, parte-se, em geral, da formulação variacional do problema dinâmico utilizando o Princípio Estendido de HAMILTON, recorrendo-se frequentemente a linearizações nessa etapa.

Chega-se, assim, a uma equação variacional, que pode ser tratada diretamente pelo método de RITZ, ou então (como neste trabalho) a partir dela estabelecer a equação a derivadas parciais do movimento.

Caso adotada a segunda alternativa, pode-se aplicar nas equações de movimento o método de GALERKIN, ou ainda, aplicar a Análise Modal caso se conheçam as autofunções do problema.

De qualquer forma resulta o já referido sistema de equações de MATHIEU-HILL.

Referindo-nos apenas a equações de MATHIEU, temos a forma geral (ver por exemplo METTLER¹⁷):

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^n F_{rp} q_p = 0 \quad (0.1)$$

$$r = 1, 2, \dots, n$$

onde q_r são coordenadas generalizadas, ω_r frequências naturais, Ω a frequência de excitação (constante) e ϵ e F_{rp} são constantes. A solução trivial do sistema (0.1) é instável se Ω se situa na vizinhança de certas frequências "críticas" dadas por

$$\Omega_0 = \frac{2\omega_r}{m} \quad m = 1, 2, \dots \quad (0.2)$$

caso em que se tem ressonância paramétrica de primeira espécie; ou dadas por

$$\Omega_0 = \frac{|\omega_r \pm \omega_p|}{m} \quad p \neq r \quad m = 1, 2, \dots \quad (0.3)$$

quando então diz-se ocorrer ressonância paramétrica de segunda espécie (também chamada ressonância combinatória).

A maior restrição que pode ser feita à Teoria que vamos utilizar é que ela só é válida para excitações "suficientemente pequenas". Acrescente-se que a partir dela (ou de modo mais geral, a partir de uma formulação linear) não é possível a determinação de amplitudes ressonantes, conforme expõe BOLOTIN³.

* * *

A obra de BOLOTIN³, "The Dynamic Stability of Elastic Systems" é, até o presente momento, o único texto didático sobre Instabilidade Elastodinâmica na literatura mundial (infelizmente, no entanto, tal obra é muito sucinta no que se refere a ressonâncias combinatórias).

O "survey" de EVAN-IWANOWSKI⁴ é um excelente levantamento de trabalhos sobre o tema publicados até 1964/1965. Referências bibliográficas comentadas sobre alguns trabalhos mais modernos são encontradas em artigo de HAGEDORN e KOVAL⁵.

CAPÍTULO I

ESTABELECIMENTO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DA VIGA

1.1. HIPÓTESES

No presente trabalho faremos a análise do problema da estabilidade elastodinâmica de uma viga de BERNOULLI-EULER, uniforme, de secção transversal com dois eixos de simetria. Suponhamos ainda que os momentos principais de inércia das secções transversais da viga sejam desiguais.

Em uma das extremidades da viga aplicam-se, axialmente, o par $T(t) = T_0 + T_1 \cos \Omega t$ e a força constante P , ambos mantendo suas direções iniciais independentemente dos deslocamentos ocasionados por êsses mesmos carregamentos.

Quanto às condições de vinculação, a viga poderá se apresentar:

À flexão: bi-engastada ou bi-rotulada

À torção: engastada ou livre na extremidade oposta àquela onde se aplicam $T(t)$ e P .

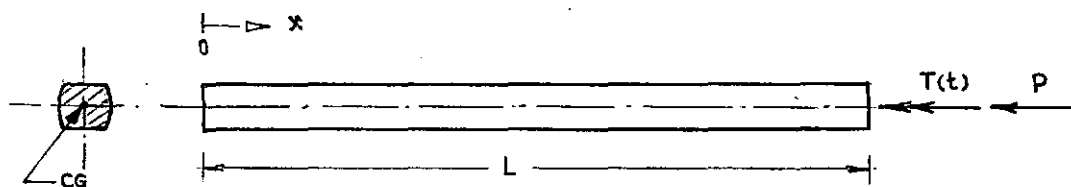


FIG.1

Dado que nesta análise, a frequência de excitação poderá assumir valores próximos, ou mesmo maiores do que a menor das frequências naturais das vibrações torcionais da viga, serão levados em conta os efeitos destas últimas. Vale dizer, os momentos torçores e seus associados, momentos fletores, serão considerados variáveis não apenas com o tempo, como também com a coordenada x da secção.

Não serão considerados efeitos de amortecimento de qualquer espécie no movimento da viga.

Destaque-se ainda o fato de que no desenvolvimento deste trabalho, não serão considerados os efeitos transitórios provenientes da aplicação de qualquer dos carregamentos.

Finalmente, devemos limitar a aplicação dos resultados obtidos a valores suficientemente pequenos de $T(t)$, a fim de que seja válida a formulação linear que vamos aplicar.

1.2. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PELO PRINCÍPIO DE HAMILTON

Uma posição de equilíbrio possível para a viga é aquela em que a mesma permanece retilínea e, conseqüentemente, $T(t)$ produz somente torção e P apenas deformação longitudinal.

Como é sabido (ver p. ex., ZIEGLER²⁵ ou BIEZENO & GRAMMEL²), esta configuração (correspondente à solução trivial

do problema) é instável para determinados valores desses carregamentos.

Suponhamos agora, como é usual nos problemas de instabilidade elástica, que devido a uma pequena imperfeição da viga, e/ou excentricidade do carregamento P , e/ou perturbação inicial, a viga se deforme, isto é, seu eixo baricêntrico assuma a forma de uma curva espacial definida pelas equações $y = y(x,t)$, $z = z(x,t)$, (fig. 2a) compatível com as condições vinculares a que está sujeita a mesma. Suponha-se entretanto, que as curvaturas assumidas pela viga sejam pequenas.

Deve-se observar que nessas condições, o par $T(t)$, além de obviamente não conservativo sob o aspecto dinâmico, é também não conservativo sob o ponto de vista geométrico, conforme demonstram TIMOSHENKO & GERE²¹.

Designemos por $M(x,t)$ o momento interno produzido pelo par $T(t)$.

Por outro lado, ainda que posteriormente consideremos a carga P constante, vamos, neste capítulo, associar a $P(t)$ variável, o esforço axial interno $N(x,t)$.

Os vetores $\underline{M}(x,t)$ e $\underline{N}(x,t)$, aplicados no baricentro de uma secção genérica S , são, por equilíbrio, paralelos a $\underline{T}(t)$ e $\underline{P}(t)$ e podem ser substituídos pelas componentes tangente, normal e bi-normal, ou sejam, componentes segundo o triedro $OX'Y'Z'$ (figs. 2b e 2c).

Nessas condições, o esforço axial $\underline{N}(x,t)$ produzirá,

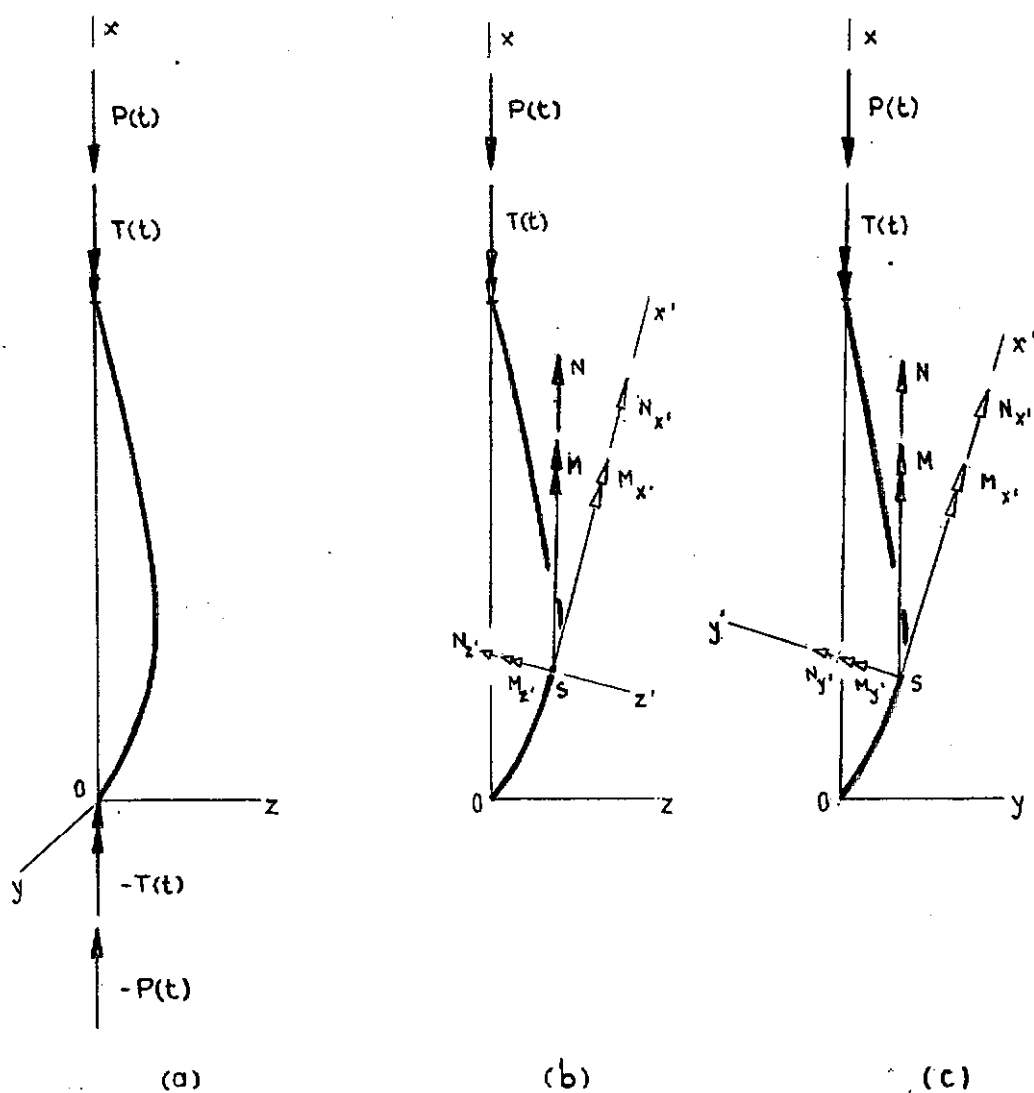


FIG. 2

além de compressão (ou tração), os momentos fletores $N_{z'}$. z e $N_{y'}$. y , que flexionam a viga segundo os planos XOZ e XOY , respectivamente (na expressão dêsses momentos, levem-se em conta as pequenas curvaturas assumidas pela viga).

Por outro lado, o momento interno $\underline{M}(x,t)$ apresenta

as seguintes componentes (figs. 2b e 2c):

$M_{x'}$ - momento torçor.

$M_{y'}$ - momento fletor que, juntamente com $N_{z'} \cdot z$, flexiona a viga segundo o plano XOZ .

$M_{z'}$ - momento fletor que, juntamente com $N_{y'} \cdot y$, flexiona a viga segundo o plano XOY .

Considerando-se ainda a hipótese das pequenas curvaturas assumidas pela viga, podem-se estabelecer as seguintes relações (fig. 3):

$$\begin{aligned} M_{y'}(x,t) &= M(x,t) \sin \alpha \\ &\cong M(x,t) \alpha \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad M_{y'}(x,t) = M(x,t) \frac{\partial y}{\partial x} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} M_{z'}(x,t) &= M(x,t) \sin \beta \\ &\cong M(x,t) \beta \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad M_{z'}(x,t) = M(x,t) \frac{\partial z}{\partial x} \quad (1.2.2)$$

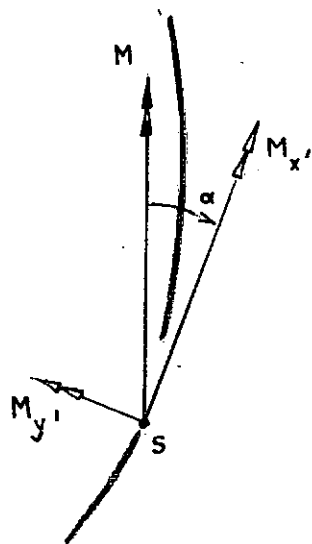


FIG.3

Utilizando agora, o Princípio de HAMILTON na forma aplicável a sistemas não conservativos, vamos estabelecer as equações a derivadas parciais que regem as vibrações transver-

sais da viga nos planos XOY e XOZ.

Como é sabido (ver p. ex., GOLDSTEIN⁶), o chamado Princípio de HAMILTON Estendido é expresso por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - V + W) dt = 0 \quad (1.2.3)$$

onde K - energia cinética
 V - energia potencial
 W - trabalho não conservativo

Consideremos, inicialmente, a vibração transversal da viga no plano XOY. Seja $m(x)$ sua massa distribuída por unidade de comprimento e $EI_y(x)$ a correspondente rigidez à flexão.

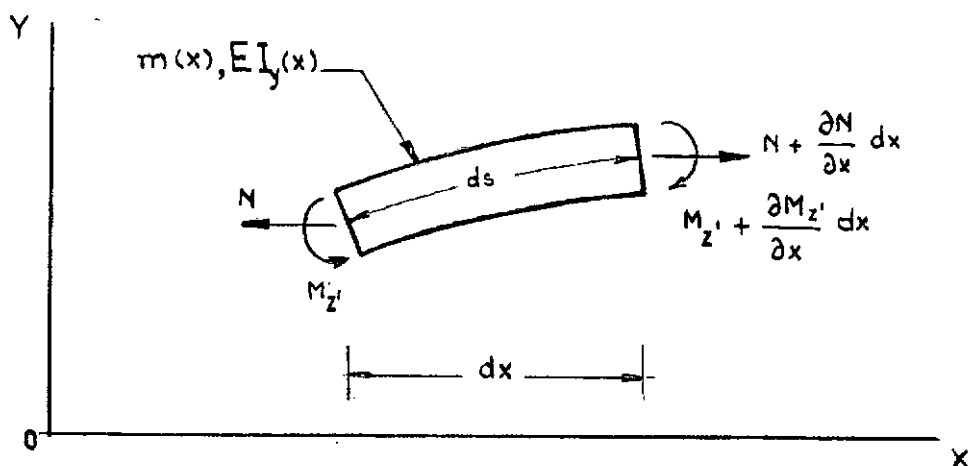


FIG. 4

Dada a suposta esbeltez da viga, serão desprezados

nêste desenvolvimento, os efeitos de cisalhamento e de inércia rotativa.

A energia cinética da viga devida à vibração transversal é dada por

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \quad (1.2.4)$$

A energia potencial, no caso, de natureza elástica, é dada por (ver p. ex., MEIROVITCH¹⁴):

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y(x) \left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (1.2.5)$$

Para avaliar o trabalho realizado pelo esforço axial interno $N(x,t)$, na flexão da viga, deve-se calcular, inicialmente, o acréscimo experimentado pela projeção horizontal dx devido à rotação do elemento ds (fig. 4). Assim, tem-se (lembrando que $ds = dx$ antes da flexão):

$$\begin{aligned} ds - dx &= \left\{ (dx)^2 + \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right]^2 (dx)^2 \right\}^{1/2} - dx \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

onde, dados os pequenos valores assumíveis por $\{\partial y / \partial x\}$, foram desprezados os demais termos da expansão binomial. Por outro lado, observe-se que os deslocamentos transversais da viga são suficientemente pequenos de modo a, em uma primeira aproximação, não alterarem os valores de $N(x,t)$.

Tem-se então

$$W_N(t) = \frac{1}{2} \int_0^L N(x,t) \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (1.2.7)$$

Quanto ao trabalho realizado por $M_z(x,t)$, considerando (1.2.2) temos:

$$W_M(t) = - \int_0^L \left[M(x,t) \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \quad (1.2.8)$$

onde o sinal negativo deve-se ao fato de que um momento negativo (sentido contrário ao eixo Z' , fig. 2b) realiza um trabalho positivo, isto é, aumenta a curvatura da viga.

Evidentemente, o trabalho externo total $W(t)$ na flexão da viga é

$$W(t) = W_N(t) + W_M(t) \quad (1.2.9)$$

Estudemos agora as variações de cada uma das parcelas do integrando de (1.2.3) (sobre propriedades operacionais de δ ver HILDEBRAND¹⁰ ou FUNG⁵).

De (1.2.4) decorre a variação da energia cinética:

$$\delta K = \int_0^L m \frac{\partial y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dx = \int_0^L m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) dx$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) dx \right] dt \\ &= \int_0^L \left[\int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) dt \right] dx \\ &= \int_0^L \left[m \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta y dt \right] dx \end{aligned}$$

Tendo-se presente, todavia, que por definição,

$\delta y(x, t) = 0$ para $t = t_1$ e $t = t_2$, segue que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y dx dt \quad (1.2.10)$$

A variação da energia potencial (1.2.5) é dada por:

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_0^L EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = \\ &= \int_0^L EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta y) dx \end{aligned}$$

que integrada por partes sucessivamente, resulta em:

$$\begin{aligned} \delta V = EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \Big|_0^L + \\ + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \, dx \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

A variação do trabalho devido ao esforço axial interno $W_N(t)$ dado por (1.2.7), é

$$\begin{aligned} \delta W_N = \int_0^L N \frac{\partial y}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \, dx = \\ = \int_0^L N \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \, dx \end{aligned}$$

ou integrando por partes:

$$\delta W_N = N \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta y \, dx \quad (1.2.12)$$

Finalmente, a variação do trabalho realizado pelo momento interno, $W_M(t)$, dado por (1.2.8) é:

$$\delta W_M = - \int_0^L M \frac{\partial z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \, dx = - \int_0^L M \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta y) \, dx$$

ou integrando por partes sucessivamente:

$$\begin{aligned} \delta W_M = & -M \frac{\partial z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L + M \frac{\partial z}{\partial x} \delta y \Big|_0^L - \\ & - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(M \frac{\partial z}{\partial x} \right) \delta y \, dx, \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Levando agora as expressões (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) e (1.2.13) em (1.2.3), além de considerar-se (1.2.9), teremos:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_0^L m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y \, dx - \Xi I_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L + \right. \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Xi I_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Xi I_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \, dx + \\ + N \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta y \, dx - \\ - M \frac{\partial z}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L + M \frac{\partial z}{\partial x} \delta y \Big|_0^L - \\ \left. - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(M \frac{\partial z}{\partial x} \right) \delta y \, dx \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

ou ainda, reagrupando:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(M \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] \delta y \, dx + \right. \\
 \left. + \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial z}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L - \right. \\
 \left. - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial z}{\partial x} \right) + N \frac{\partial y}{\partial x} \right] \delta y \Big|_0^L \right\} dt = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.2.15}$$

De acôrdo com o lema fundamental do Cálculo Variacional (ver p. ex., WEINSTOCK²³), a integral (1.2.15) deve anular-se para valores arbitrários de δy e de $\delta(\partial y / \partial x)$, de modo que estas variações podem ser assumidas como iguais a zero em $x = 0$ e $x = L$ e diferentes de zero no interior do intervalo $[x, L]$.

Portanto, resulta a seguinte equação de movimento no plano XY:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(M \frac{\partial z}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0
 \tag{1.2.16}$$

Por outro lado, considerando ainda (1.2.15) e (1.2.16) e dada a natureza arbitrária das variações, podemos escrever:

$$\left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial z}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial z}{\partial x} \right) + N \frac{\partial y}{\partial x} \right] \delta y \Big|_0^L = 0$$

de onde decorrem as seguintes condições de contorno:

$$EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (1.2.17)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial z}{\partial x} \right) + N \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0 \quad (1.2.18)$$

para $x = 0$ e $x = L$.

Para a obtenção da equação de movimento e condições de contorno relativas às vibrações transversais no plano xz , basta considerar-se a simetria do problema, isto é, permutar y e z em (1.2.16), (1.2.17) e (1.2.18). Além disso, dado que M_y , sendo um momento positivo, produz trabalho positivo (contrariamente a M_z), os termos que o contém na equação e condições de contorno a obter devem ter sinais contrários aos de seus correspondentes em (1.2.16), (1.2.17) e (1.2.18).

Portanto, a equação de movimento da viga no plano xz será

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(M \frac{\partial y}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.19)$$

e as condições de contorno serão dadas por

$$EI_z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - M \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (1.2.20)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI_z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - M \frac{\partial y}{\partial x} \right) + N \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0 \quad (1.2.21)$$

para $x = 0$ e $x = L$

1.3. DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS TORÇORES AO LONGO DA VIGA

Suponha-se agora a viga uniforme, de secção transversal com dois eixos de simetria, à qual se aplica um par $T(t)$ na extremidade de abscissa $x = L$.

A equação de movimento das vibrações torcionais livres da viga é dada por (ver p. ex., MEIROVITCH¹⁴):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[kGI_p(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right] = J_p(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.3.1)$$

No entanto, dadas as características da viga aqui considerada, pode-se escrever simplesmente

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (1.3.2)$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{k G I_p}{J_p}} = \sqrt{\frac{k G}{\rho}} \quad (1.3.3)$$

sendo c - velocidade de propagação das ondas associadas às vibrações torcionais.

k - coeficiente dependente da forma da secção
(ver TIMOSHENKO & GOODIER²², pág. 277)

G - módulo de elasticidade transversal.

I_p - momento de inércia polar da secção transversal da viga.

J_p - momento de inércia mássico por unidade de comprimento do eixo longitudinal da viga.

ρ - massa específica do material.

A resposta transitória não nos interessa neste trabalho, pelo motivo de que a mesma desaparece rapidamente devido ao amortecimento interno da viga.

Assim, vamos obter inicialmente a resposta permanente da viga à excitação $T(t) = T_0 + T_1 \cos \Omega t$, para, em seguida, determinarmos a expressão do momento torçor a ela associ-

ado, considerando sucessivamente dois tipos de vinculação à torção.

1.3.1. VIGA ENGASTADA À TORÇÃO

Suponhamos a viga engastada à torção na extremidade de abscissa $x = 0$. Recorrendo ao método da separação das variáveis, suponha-se a resposta permanente a $T_1 \cos \Omega t$ na forma

$$\theta_1(x, t) = \Theta(x) \cos \Omega t \quad (1.3.4)$$

que levada em (1.3.2) nos dá

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \gamma^2 \Theta = 0 \quad (1.3.6)$$

onde
$$\gamma = \frac{\Omega}{c} \quad (1.3.7)$$

Portanto

$$\Theta(x) = A \cos \gamma x + B \sin \gamma x \quad (1.3.8)$$

Aplicando agora as condições de contorno correspondentes ao caso,

$$\theta_1(0, t) = 0 \quad kGI_p \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right|_{x=L} = T_1 \cos \Omega t \quad (1.3.9)$$

e tendo em conta (1.3.4), resulta

$$\Theta_1(x,t) = \frac{T_1}{kGI_p} \frac{\sin \beta x}{\cos \beta L} \cos \Omega t \quad (1.3.10)$$

Por outro lado, para o momento estático T_0 , tem-se pela Resistência dos Materiais:

$$\Theta_0 = \frac{T_0}{kGI_p} x \quad (1.3.11)$$

Assim, sendo a resposta permanente dada por

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 + \Theta_1(x,t) \quad (1.3.12)$$

e o momento torçor ao longo da viga, conforme a Teoria da Elasticidade, expresso por

$$M(x,t) = kGI_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)$$

teremos, neste caso, após as devidas substituições:

$$M(x,t) = T_0 + T_1 \frac{\cos \beta x}{\cos \beta L} \cos \Omega t \quad (1.3.13)$$

1.3.2. VIGA LIVRE À TORÇÃO

Seja agora o caso da viga com a extremidade de abscissa $x = 0$, livre.

Para a determinação da resposta permanente associada a $T_1 \cos \Omega t$, vamos, análogamente ao caso anterior, aplicar o método da separação das variáveis.

Considerando então as condições de contorno correspondentes ao caso,

$$kGI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.3.14a)$$

$$kGI_p \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=L} = T_1 \cos \Omega t \quad (1.3.14b)$$

e levando em consideração (1.3.4) e (1.3.8), vem

$$\theta_1(x,t) = - \frac{T_1}{kGI_p \gamma} \frac{\cos \gamma x}{\sin \gamma L} \cos \Omega t \quad (1.3.15)$$

Para a determinação da resposta a T_0 , precisamos, neste caso, recorrer à análise modal.

Consideremos então a equação de movimento do problema, obtida a partir de (1.3.2) pelo acréscimo do termo correspondente à excitação:

$$kGI_p \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + T_0(t) \cdot \delta(x-L) = J_p \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} \quad (1.3.16)$$

onde $\delta(x-L)$ é a função delta de Dirac, definida por

$$\delta(x-L) = 0 \quad x \neq L \quad (1.3.17)$$

$$\int_0^L \delta(x-L) dx = 1$$

e $T_0(t)$ representa um momento de excitação genérico.

Pelo teorema da expansão em modos próprios (ver p. ex., MEIROVITCH¹⁴) pode-se expressar a solução de (1.3.16) pela série

$$\Theta_0(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n0}(x) \cdot \eta_n(t) \quad (1.3.18)$$

onde $\eta_n(t)$ - coordenadas generalizadas

$\Theta_{n0}(x)$ - modos próprios normalizados, dados por

$$\Theta_{n0}(x) = \sqrt{\frac{2}{J_p L}} \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.19)$$

Levando (1.3.19) em (1.3.16) obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ k G I_p \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{2}{J_p L} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \eta_n(t) + \right. \\ \left. + J_p \left(\frac{2}{J_p L} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \ddot{\eta}_n(t) \right\} = T_0(t) \cdot \delta(x-L)$$

Multiplicando a equação anterior por $\Theta_{m0}(x)$ e integrando entre 0 e L, vem pelas relações de ortonormalidade dos modos próprios:

$$\ddot{\eta}_n(t) + \omega_n^2 \eta_n(t) = N(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.20)$$

onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kG I_p}{J_p}} \cdot \frac{n\pi}{L} = c \frac{n\pi}{L} \quad (1.3.21)$$

e

$$N(t) = T_0(t) (2/J_p L)^{1/2} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \delta(x-L) dx$$

Mas por (1.3.17) pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \delta(x-L) dx &= \int_0^L \cos n\pi \cdot \delta(x-L) dx \\ &= \cos n\pi = (-1)^n \end{aligned}$$

e tem-se portanto,

$$N_n(t) = (-1)^n T_0(t) \sqrt{\frac{2}{J_p L}} \quad (1.3.22)$$

Façamos agora

$$T_0(t) = T_0 u(t) \quad (1.3.23)$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário.

A expressão das coordenadas generalizadas pode ser obtida pela integral de convolução (ver p. ex., MEIROVITCH¹⁴):

$$\begin{aligned} \eta_n(t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t N(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \\ &= (-1)^n T_0 \frac{(2/J_p L)^{1/2}}{\omega_n} \int_0^t u(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= (-1)^n T_0 \frac{(2/J_p L)^{1/2}}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) \quad (1.3.24)$$

Considerando-se então (1.3.18), (1.3.19), (1.3.21) e (1.3.24) pode-se escrever

$$\theta_0(x, t) = \frac{2T_0}{J_p L} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2} \right] \quad (1.3.25)$$

Mas pela expressão (1.3.21) tem-se que $\omega_0 = 0$ e assim o termo da série anterior correspondente a $n = 0$ é indeterminado, pelo que se considera o valor do limite

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2} \right] = \frac{t^2}{2} \quad (1.3.26)$$

Por outro lado, tendo em vista que o desenvolvimento em série de Fourier da função definida por

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & x \in [-L, L] \\ f(x + 2L) = f(x) \end{cases}$$

é dado por

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

resulta imediatamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{L^2} \left[x^2 - \frac{L^2}{3} \right] \quad (1.3.27)$$

Substituindo-se as expressões (1.3.26) e (1.3.27) em (1.3.25) tem-se a resposta correspondente a $T_0(t) = T_0 u(t)$:

$$\begin{aligned} \Theta_0(x,t) = & \frac{T_0}{J_p L} t^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0 L}{kGI_p \pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \omega_n t + \\ & + \frac{T_0}{kGI_p L} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{6} \right] \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Na expressão (1.3.28), são imediatamente reconhecidos o primeiro termo como a rotação rígida da viga, e o segundo como a resposta transitória, ambos não dizendo respeito a este trabalho, ao qual interessa apenas a resposta permanente, representada pela última parcela.

Superpondo então, $\Theta_1(x,t)$ dada por (1.3.15), com a componente permanente de $\Theta_0(x,t)$, vem

$$\Theta(x,t) = \frac{T_0}{kGI_p L} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{6} \right] - \frac{T_1}{kGI_p L} \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda L} \cos \Omega t \quad (1.3.29)$$

Finalmente, considerando que o momento torçor ao longo da viga é dado por $M(x,t) = kGI (\partial \Theta / \partial x)$, teremos

$$M(x,t) = T_0 \frac{x}{L} + T_1 \frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda L} \cos \Omega t \quad (1.3.30)$$

1.4. CONSIDERAÇÕES SÔBRE AS EQUAÇÕES OBTIDAS

Nas secções anteriores, obtivemos um sistema de equações a derivadas parciais lineares homogêneas, que regem as vibrações flexionais da viga em seus dois planos principais, bem como as correspondentes condições de contorno.

Essas equações são válidas para vigas não uniformes, bem como para esforços axiais variáveis com o tempo. Com isso pretendeu-se apenas facilitar a obtenção de resultados mais gerais, em análises posteriores.

Todavia, neste trabalho teremos

$$\begin{aligned} m(x) &= m = \text{constante} \\ EI_y(x) &= EI_1 = \text{constante} \\ EI_z(x) &= EI_2 = \text{constante} \\ N(x,t) &= P = \text{constante} \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Por outro lado, a fim de tornar mais clara a exposição que se segue, vamos fazer daqui por diante

$$\begin{aligned} y(x,t) &\equiv y_1(x,t) \\ z(x,t) &\equiv y_2(x,t) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Portanto teremos, de (1.2.16), (1.2.17), (1.2.18), (1.2.19), (1.2.20), (1.2.21), (1.4.1) e (1.4.2):

PLANO XY

$$EI_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[M(x,t) \frac{\partial y_2}{\partial x} \right] + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4.3)$$

$$EI_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + M(x,t) \frac{\partial y_2}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \quad (1.4.4)$$

e

$$EI_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left[M(x,t) \frac{\partial y_2}{\partial x} \right] + P \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad y_1 = 0 \quad (1.4.5)$$

para $x = 0$ e $x = L$

PLANO XZ

$$EI_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[M(x,t) \frac{\partial y_1}{\partial x} \right] + m \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4.6)$$

$$EI_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - M(x,t) \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} = 0 \quad (1.4.7)$$

e

$$EI_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} \left[M(x,t) \frac{\partial y_1}{\partial x} \right] + P \frac{\partial y_2}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad y_2 = 0$$

para $x = 0$ e $x = L$

No capítulo seguinte vamos estudar as soluções dessas equações particularizando-as para vigas com diferentes tipos de vinculação, isto é, fixando condições de contorno à flexão e substituindo os momentos torçores internos conforme as condições de contorno à torção.

É oportuno observar, a esta altura, o fato de que tratamos as vibrações flexionais da viga separadamente de suas vibrações torcionais, embora seja evidente que do ponto de vista físico, haja uma interação entre elas. Este fato poderia, à primeira vista, obrigar-nos a uma formulação bem mais complexa do problema, qual seja, a de estabelecer, a partir do Princípio de HAMILTON, um sistema de três equações de movimento simultâneas, em cada uma delas aparecendo variáveis relativas à flexão e à torção dinâmicas.

Felizmente no entanto, METTLER¹⁵ em artigo publicado em 1947, demonstrou a validade do tipo de formulação que ora empregamos.

CAPÍTULO II

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Nêste capítulo vamos transformar as equações de movimento obtidas anteriormente, em sistemas de equações diferenciais ordinárias de MATHIEU, utilizando para êste fim, o método de GALERKIN (ver p. ex., MEIROVITCH¹⁴ ou FUNG⁵).

2.1. VIGA BI-ENGASTADA À FLEXÃO E ENGASTADA À TORÇÃO

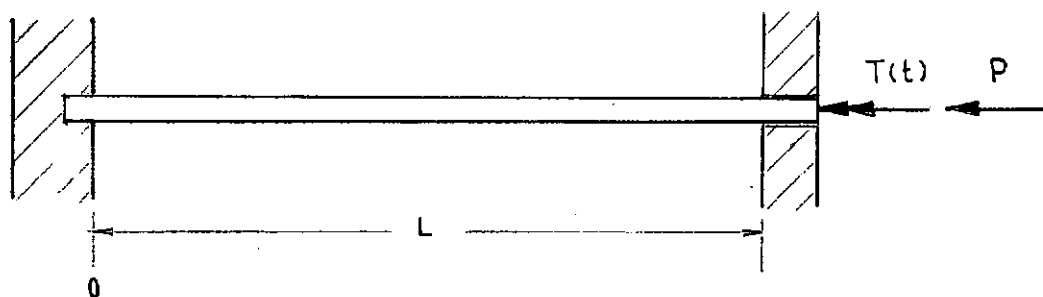


FIG. 5

Substituindo (1.3.13) em (1.4.3) e efetuando as derivações indicadas, resulta a primeira das equações de movimento específicas para o caso:

$$EI_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \left(T_0 + T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \beta x}{\cos \beta L} \right) \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(2 \gamma T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma L} \right) \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \left(\gamma^2 T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma L} \right) \frac{\partial y_2}{\partial x} \\
 & + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Aqui as condições de contorno correspondentes ao caso são evidentemente

$$y_1(0,t) = y_1(L,t) = y_2(0,t) = y_2(L,t) = 0 \tag{2.1.2}$$

e

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right)_{x=L} = \left(\frac{\partial y_2}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial y_2}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \tag{2.1.3}$$

Façamos agora as seguintes substituições de variáveis:

$$w_1(x,t) = y_1(x,t) + 1 \tag{2.1.4}$$

$$w_2(x,t) = y_2(x,t) + 1 \tag{2.1.5}$$

Teremos então a EDP

$$\begin{aligned}
 & EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \left(T_0 + T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma L} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} - \\
 & - \left(2 \gamma T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \gamma x}{\cos \gamma L} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \left(\gamma^2 T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma L} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} +
 \end{aligned}$$

$$+ m \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.6)$$

que é formalmente a mesma (2.1.1), como aliás se poderia prever facilmente. As novas condições de contorno do problema são obtidas imediatamente:

$$w_1(0,t) = w_1(L,t) = w_2(0,t) = w_2(L,t) = 1 \quad (2.1.7)$$

e

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=L} = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \quad (2.1.8)$$

Tendo em vista (2.1.6), (2.1.7) e (2.1.8), pode-se propor a seguinte expansão em série para a solução:

$$w_1(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} q_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} \quad (2.1.9)$$

$$w_2(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} q_{2p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} \quad (2.1.10)$$

onde

$q_{1p}(t)$ e $q_{2p}(t)$ são coordenadas generalizadas

e

$$\Phi_{1p}(t) = \Phi_{2p}(t) = \cos \frac{2p\pi x}{L} \quad (2.1.11)$$

são funções de comparação do problema de autovalor (conforme

FUNG⁵, MEIROVITCH¹⁴ e outros, funções arbitrárias satisfazendo tôdas as condições de contorno, sejam geométricas ou naturais do problema de autovalor, sendo ainda $2n$ diferenciáveis sobre o domínio, onde $2n$ é a ordem do operador ' \mathcal{L} ' do problema).

Observe-se por outro lado, que

$$\{ \Phi_{ip} \mid i=1,2, \dots, p=0,1,2,\dots \} \quad (2.1.12)$$

é um conjunto completo de funções ortogonais (ver p. ex., WYLIE²⁴).

Passando a aplicar o método de GALERKIN, vamos levar (2.1.9) e (2.1.10) em (2.1.6), daí resultando

$$\begin{aligned} & EI_1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^4 q_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} - \\ & - P \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 q_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} + \\ & + \left(T_0 + T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \nu x}{\cos \nu L} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^3 q_{12p}(t) \sin \frac{2p\pi x}{L} + \\ & + \left(2\nu T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \nu x}{\cos \nu L} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 q_{12p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\nu^2 T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \nu x}{\cos \nu L} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right) q_{2p}(t) \sin \frac{2p\pi x}{L} + \\
 & + m \sum_{p=0}^{\infty} \ddot{q}_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} = 0 \quad (2.1.13)
 \end{aligned}$$

Multiplicando agora a equação (2.1.13) por

$$\Phi_{ir}(x) = \cos \frac{2r\pi x}{L} \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.14)$$

e integrando-a entre 0 e L, resulta depois de operações algébricas simples:

$$\begin{aligned}
 & m \sum_{p=0}^{\infty} \left[\int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{2p\pi x}{L} dx \right] \ddot{q}_{1p}(t) + \\
 & + \sum_{p=0}^{\infty} \left[EI_1 \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^4 - P \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 \right] \left[\int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{2p\pi x}{L} dx \right] q_{1p}(t) \\
 & + T_0 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^3 \left[\int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{2p\pi x}{L} dx \right] q_{2p}(t) + \\
 & + T_1 \frac{\cos \Omega t}{\cos \nu L} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{2p\pi}{L} \right)^3 + \nu^2 \left(\frac{2p\pi}{L} \right) \right] \int_0^L \cos \nu x \cdot \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{2p\pi x}{L} dx + \right. \\
 & \quad \left. + 2\nu \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \sin \nu x \cdot \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{2p\pi x}{L} dx \right\} q_{2p}(t) = 0 \\
 & \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.15)
 \end{aligned}$$

Mas tendo em vista as relações de ortogonalidade

$$\int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{2p\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq r \\ \frac{L}{2} & \text{se } p = r \neq 0 \\ L & \text{se } p = r = 0 \end{cases} \quad (2.1.16)$$

$$\int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{2p\pi x}{L} dx = 0 \quad (2.1.17)$$

e efetuando as integrações do tipo

$$\int_0^L \left(\begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \alpha x \right) \left(\begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \beta x \right) \left(\begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \gamma x \right) dx \quad (2.1.18)$$

(ver GROEBNER & HOFREITER⁷), resulta após algumas transformações algébricas:

$$\ddot{q}_{1r}(t) + \omega_{1r}^2 q_{1r}(t) + \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=0}^{\infty} F_{rp} q_{2p}(t) = 0 \\
 r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.19)$$

onde

$$\omega_{1r} = \left[\frac{EI_1}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^4 - \frac{P}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.1.20)$$

são frequências naturais das vibrações flexionais no plano XY ;

$$\epsilon = \frac{8\pi^2 T_1}{mL^3} \quad (2.1.21)$$

$$F_{rp} = (\sec \lambda L - 1) \left[\frac{p^2(\lambda L)^4 - 12\pi^2 p^2(p^2 + r^2)(\lambda L)^2 + 16\pi^4 p^4(p^2 - r^2)}{(\lambda L)^4 - 8\pi^2(p^2 + r^2)(\lambda L)^2 + 16\pi^4(p^2 - r^2)^2} \right] \quad (2.1.22)$$

onde $\lambda = \Omega / C$

Considerando agora a segunda das equações de movimento (1.4.6) e as condições de contorno (1.4.7) e (1.4.8) e lembrando a simetria do problema, podemos, a partir de (2.1.19) e (2.1.20), estabelecer diretamente o sistema de equações de Mathieu correspondente, bastando para isso permutar os índices 1 e 2 e multiplicar por (-1) os termos em T_1 .

Resulta assim,

$$\ddot{q}_{12r}(t) + \omega_{2r}^2 q_{12r}(t) - \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=0}^{\infty} F_{rp} q_{1p}(t) = 0$$

$$r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.23)$$

onde

$$\omega_{2r} = \left[\frac{EI_2}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^4 - \frac{P}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.1.24)$$

e ϵ e F_{rp} são os coeficientes definidos em (2.1.21) e (2.1.22), respectivamente.

Observe-se agora que as equações correspondentes a $r = 0$ terão as frequências naturais ω_{1r} e ω_{2r} nulas, de onde se conclui que estão associadas a movimentos não vibratórios. Por outro lado, de (2.1.14), é imediato que $\Phi_{10}(x) = 1$ o que corresponde a um modo rígido da viga. Portanto $w_{10}(x, t)$ corresponde a um deslocamento rígido e evidentemente, estável do ponto de vista da elastodinâmica. Aliás este modo foi introduzido "artificialmente", pela substituição de variáveis feita de acordo com (2.1.4) e (2.1.5). Conclui-se que poderemos tomar nos posteriores desenvolvimentos relativos ao caso,

$$r = 1, 2, \dots \quad (2.1.25)$$

Finalmente, um aspecto que deve ser ressaltado é que o valor do torque médio T_0 é irrelevante para os resultados obtidos.

2.2. VIGA BI-ENGASTADA À FLEXÃO E LIVRE À TORÇÃO

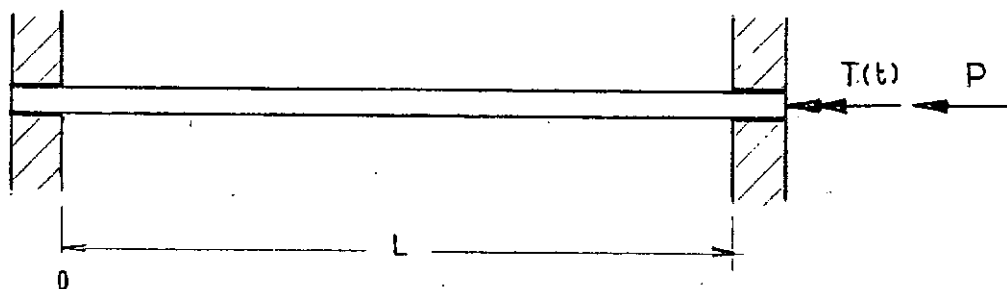


FIG. 6

Com um encaminhamento análogo ao do caso anterior, vamos substituir (1.3.30) em (1.4.3). Efetuando as derivações indicadas, obtem-se a equação do equilíbrio dinâmico à flexão da viga no plano XY :

$$\begin{aligned}
 EI_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \left(T_0 \frac{x}{L} + T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma L} \right) \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + \\
 + 2 \left(\frac{T_0}{L} + \gamma T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \gamma x}{\sin \gamma L} \right) \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \\
 - \left(\gamma^2 T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma L} \right) \frac{\partial y_2}{\partial x} + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Dado que temos aqui as mesmas condições de vinculação à flexão do caso anterior, as condições de contorno cor -

respondentes são as mesmas (2.1.2) e (2.1.3).

Façamos também aqui a substituição de variáveis:

$$w_1(x,t) = y_1(x,t) + 1 \quad (2.1.4)$$

$$w_2(x,t) = y_2(x,t) + 1 \quad (2.1.5)$$

É óbvio que, análogamente ao caso anterior, a EDP (2.2.1) mantém a mesma forma (basta assim, substituir y por w) e as condições de contorno resultam as mesmas (2.1.9) e (2.1.10). Portanto teremos, ainda, a mesma solução em série:

$$w_1(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} q_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} \quad (2.1.9)$$

$$w_2(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} q_{2p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} \quad (2.1.10)$$

onde valem as observações relativas a (2.1.11) e (2.1.12).

Aplicando agora o método de GALERKIN, teremos então de (2.2.1), (2.1.9) e (2.1.10):

$$\begin{aligned} & EI_1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^4 q_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} - \\ & - P \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 q_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(T_0 \frac{x}{L} + T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma L} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^3 q_{2p}(t) \sin \frac{2p\pi x}{L} - \\
& - 2 \left(\frac{T_0}{L} + \gamma T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \gamma x}{\sin \gamma L} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 q_{2p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} + \\
& + \left(\gamma^2 T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma L} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2p\pi}{L} \right) q_{2p}(t) \sin \frac{2p\pi x}{L} + \\
& + m \sum_{p=0}^{\infty} \ddot{q}_{1p}(t) \cos \frac{2p\pi x}{L} = 0 \quad (2.2.2)
\end{aligned}$$

Multiplicando (2.2.2) por $\Phi_{ir} = \cos 2r\pi x / L$, $r = 0, 1, 2, \dots$, e integrando entre 0 e L, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& m \sum_{p=0}^{\infty} \left[\int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{2p\pi x}{L} \cdot dx \right] \ddot{q}_{1p}(t) + \\
& + \sum_{p=0}^{\infty} \left[EI \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^4 - P \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 \right] \left[\int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{2p\pi x}{L} \cdot dx \right] q_{1p}(t) \\
& + \frac{T_0}{L} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2p\pi}{L} \right)^3 \int_0^L x \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{2p\pi x}{L} \cdot dx - \right.
\end{aligned}$$

$$- 2 \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{2p\pi x}{L} dx \Big] +$$

$$+ T_1 \frac{\cos \Omega t}{\cos \gamma L}.$$

$$\cdot \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \left[\gamma^2 \left(\frac{2p\pi}{L} \right) - \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^3 \right] \int_0^L \sin \gamma x \cdot \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{2p\pi x}{L} dx + \right.$$

$$\left. - 2\gamma \left(\frac{2p\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \cos \gamma x \cdot \cos \frac{2r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{2p\pi x}{L} dx \right\} q_{12p}(t) = 0$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2.2.3)$$

Considerando agora as relações de ortogonalidade (2.1.16) e (2.1.17) e efetuando as demais integrações, resulta após algumas transformações algébricas:

$$\ddot{q}_{1r}(t) + \omega_{1r}^2 q_{1r}(t) + \beta \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq r}}^{\infty} D_{rp} q_{12p}(t) + \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=0}^{\infty} F_{rp} q_{12p}(t) = 0$$

$$r = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2.2.4)$$

onde

$$\omega_{1r} = \left[\frac{EI_1}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^4 - \frac{p}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.5)$$

$$\beta = \frac{8\pi^2 T_0}{mL^3} \quad (2.2.6)$$

$$\epsilon = \frac{8\pi^2 T_1}{mL^3} \quad (2.2.7)$$

$$D_{rp} = \frac{8p^4 + 5r^2p^2 - 5r^4}{8r^2 - 8p^2} \quad (2.2.8)$$

$$F_{rp} = \operatorname{tg} \gamma L \left[\frac{p^2(\gamma L)^4 - 12\pi^2 p^2 r^2 (\gamma L)^2 + 18\pi^4 p^4 (r^2 - p^2)}{(\gamma L)^4 - 8\pi^2 (p^2 + r^2)(\gamma L)^2 + 16\pi^4 (p^2 - r^2)^2} \right] \quad (2.2.9)$$

Analogamente ao caso da secção (2.1.), o segundo conjunto de equações, correspondentes às oscilações no plano XZ, é obtido diretamente do primeiro, levando-se em conta as mesmas razões de simetria. Teremos então:

$$\ddot{q}_{2r}(t) + \omega_{2r}^2 q_{2r}(t) - \beta \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq r}}^{\infty} D_{rp} q_{1p}(t) - \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=0}^{\infty} F_{rp} q_{1p}(t) = 0$$

$$r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.10)$$

$$\omega_{2r} = \left[\frac{EI_2}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^4 - \frac{P}{m} \left(\frac{2r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.11)$$

e β , D_{rp} , ϵ e F_{rp} são os coeficientes já definidos logo acima.

Ainda como no caso anterior, as equações correspondentes a $r = 0$ terão as frequências naturais nulas, bem como tem-se $\bar{\Phi}_{i0} = 1$ e portanto, a $r = 0$ corresponde um deslocamento rígido da viga, irrelevante na presente análise. Assim, nos posteriores desenvolvimentos relativos a este caso, poderemos fazer

$$r = 1, 2, \dots \quad (2.2.12)$$

A distinção mais interessante entre os dois casos já abordados (além das diferenças numéricas entre alguns coeficientes), é de que neste segundo, o torque médio T_0 está presente nas equações diferenciais e portanto, influi no comportamento elastodinâmico da viga.

2.3. VIGA BI-ROTULADA À FLEXÃO E ENGASTADA À TORÇÃO

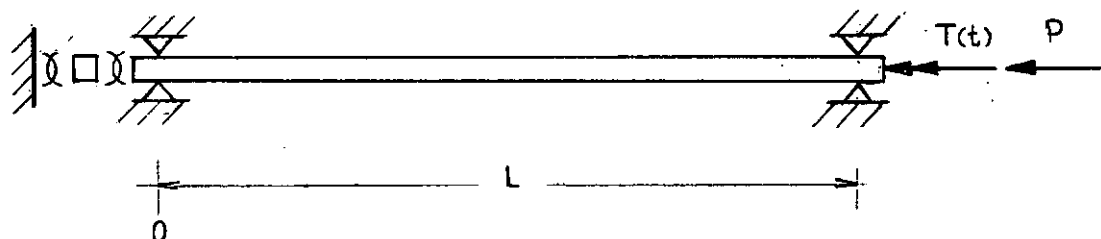


FIG.7

Seguindo mais uma vez a marcha adotada nas secções 2.1. e 2.2., vamos substituir (1.3.13) em (1.4.3) e após as derivações indicadas, resulta a primeira das equações de movimento específicas para o caso (plano XY):

$$\begin{aligned}
 EI_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \left(T_0 + T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma L} \right) \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} - \\
 - \left(2\gamma T_1 \cos \Omega t \frac{\sin \gamma x}{\cos \gamma L} \right) \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \left(\gamma^2 T_1 \cos \Omega t \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma L} \right) \frac{\partial y_2}{\partial x} + \\
 + m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Nêste caso, considerando-se as condições vinculares à flexão, resultam as condições de contorno seguintes.

De (1.4.5) tem-se:

$$y_1(0,t) = y_1(L,t) = y_2(0,t) = y_2(L,t) = 0 \quad (2.3.2)$$

Considerando agora (1.4.4) e (1.3.13), resultam:

$$e \quad \left. \begin{aligned} EI_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \left(T_0 + T_1 \frac{\cos \Omega t}{\cos \Omega L} \right) \frac{\partial y_2}{\partial x} &= 0 \\ EI_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \left(T_0 + T_1 \frac{\cos \Omega t}{\cos \Omega L} \right) \frac{\partial y_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} x = 0 \quad (2.3.3)$$

$$e \quad \left. \begin{aligned} EI_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \left(T_0 + T_1 \cos \Omega t \right) \frac{\partial y_2}{\partial x} &= 0 \\ EI_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \left(T_0 + T_1 \cos \Omega t \right) \frac{\partial y_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} x = L \quad (2.3.4)$$

É evidente que se torna praticamente impossível a obtenção de funções que satisfaçam simultaneamente a todas as condições de contorno acima, pelo que vamos empregar na resolução deste problema de contorno, funções admissíveis do pro-

blema de autovalores correspondente (isto é, conforme FUNG⁵, MEIROVITCH¹⁴ e outros, funções que satisfazem apenas as condições de contorno geométricas, sendo n vêzes diferenciáveis sobre o domínio, onde $2n$ é a ordem do operador ' \mathcal{L} ').

Assim, tendo em vista apenas (2.3.2), façamos

$$y_1(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} q_{1p}(t) \sin \frac{p\pi x}{L} \quad (2.3.5)$$

$$y_2(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} q_{2p}(t) \sin \frac{p\pi x}{L} \quad (2.3.6)$$

onde $q_{1p}(t)$ e $q_{2p}(t)$ - coordenadas generalizadas

$\Phi_{lp} = \sin \frac{p\pi x}{L}$ - funções admissíveis do problema de autovalor

$$l=1,2, \quad p=1,2,\dots \quad (2.3.7)$$

Acentue-se que $\{\Phi_{lp}\}$ é um conjunto completo de funções ortogonais.

Passando à aplicação do método de GALERKIN, vamos substituir (2.3.5) e (2.3.6) em (2.3.1), daí resultando:

$$\begin{aligned}
& m \sum_{p=1}^{\infty} \sin \frac{p\pi x}{L} \cdot \ddot{q}_{1p}(t) + \\
& + \sum_{p=1}^{\infty} \left[EI_1 \left(\frac{p\pi}{L} \right)^4 - P_0 \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \right] \sin \frac{p\pi x}{L} \cdot q_{1p}(t) - \\
& - T_0 \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{p\pi}{L} \right)^3 \cos \frac{p\pi x}{L} \cdot q_{2p}(t) - \\
& - T_1 \frac{\cos \Omega t}{\cos \gamma L} \cdot \\
& \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{p\pi}{L} \right)^3 + \gamma^2 \left(\frac{p\pi}{L} \right) \right] \cos \gamma x \cdot \cos \frac{p\pi x}{L} - \right. \\
& \left. - 2\gamma \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \sin \gamma x \cdot \sin \frac{p\pi x}{L} \right\} q_{2p}(t) = 0
\end{aligned}$$

(2.3.8)

Multiplicando agora (2.3.8) por $\Phi_{1r} = \sin(r\pi x/L)$
 $r = 1, 2, \dots$, e integrando entre 0 e L, teremos:

$$m \sum_{p=1}^{\infty} \left[\int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{p\pi x}{L} dx \right] \ddot{q}_{1p}(t) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \left[\pm I_1 \left(\frac{p\pi}{L} \right)^4 - p \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \right] \left[\int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{p\pi x}{L} \cdot dx \right] q_{1p}(t) -$$

$$- T_0 \sum_{p=1}^{\infty} \left[\left(\frac{p\pi}{L} \right)^3 \int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{p\pi x}{L} \cdot dx \right] q_{2p}(t) -$$

$$- T_1 \frac{\cos \Omega t}{\cos \beta L}.$$

$$\cdot \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{p\pi}{L} \right)^3 + \beta^2 \left(\frac{p\pi}{L} \right) \right] \int_0^L \cos \beta x \cdot \sin \frac{r\pi x}{L} \cdot \cos \frac{p\pi x}{L} \cdot dx - \right.$$

$$\left. - 2\beta \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \sin \beta x \cdot \sin \frac{r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{p\pi x}{L} \cdot dx \right\} q_{2p}(t) = 0$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (2.3.9)$$

Tendo em vista, entretanto, as condições de ortogonalidade

$$\int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \cdot \sin \frac{p\pi x}{L} \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq r \\ \frac{L}{2} & \text{se } p = r \neq 0 \end{cases}$$

$$(2.3.10)$$

$$\int_0^L \sin \frac{r\pi x}{L} \cos \frac{p\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{[(-1)^{r+p} - 1] Lr}{\pi^2(p^2 - r^2)} & \text{se } p \neq r \\ 0 & \text{se } p = r \end{cases}$$

(2.3.11)

e os valores das integrais dos tipos (2.1.18), resulta então:

$$\ddot{q}_{1r}(t) + \omega_{1r}^2 q_{1r}(t) + \beta \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq r}}^{\infty} D_{rp} q_{1p}(t) + \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} q_{1p}(t) = 0$$

$$r = 1, 2, \dots$$

(2.3.12)

onde

$$\omega_{1r} = \left[\frac{EI_1}{m} \left(\frac{r\pi}{L} \right)^4 - \frac{P}{m} \left(\frac{r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.3.13)$$

$$\beta = \frac{2\pi^2 T_0}{mL^3} \quad (2.3.14)$$

$$D_{rp} = \frac{[1 - (-1)^{r+p}] r^4}{p^2 - r^2} \quad (2.3.15)$$

$$\epsilon = \frac{2\pi^2 T_1}{mL^3} \quad (2.3.16)$$

$$F_{rp} = \left[\sec \lambda L - (-1)^{r+p} \right] \left[\frac{r^2(\lambda L)^4 - \pi^2 r^2(4rp - p^2)(\lambda L)^2 - \pi^4 r^4(r^2 - p^2)}{(\lambda L)^4 - 2\pi^2(p^2 + r^2)(\lambda L)^2 + \pi^4(r^2 - p^2)^2} \right]$$

(2.3.17)

O conjunto de equações diferenciais em termos das coordenadas generalizadas das vibrações flexionais da viga no plano XZ é obtido diretamente de (2.3.12) considerando-se as mesmas razões de simetria invocadas nas secções 2.1. e 2.2..

Portanto teremos

$$\ddot{q}_{2r}(t) + \omega_{2r}^2 q_{2r}(t) - \beta \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq r}}^{\infty} D_{rp} q_{1p}(t) - \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} q_{1p}(t) = 0$$

r = 1, 2, \dots \quad (2.3.18)

onde

$$\omega_{2r} = \left[\frac{EI_2}{m} \left(\frac{r\pi}{L} \right)^4 - \frac{p}{m} \left(\frac{r\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.3.19)$$

e os coeficientes β , D_{rp} , ϵ e F_{rp} são os mesmos definidos em (2.3.14), (2.3.15), (2.3.16) e (2.3.17), respectivamente.

Também neste caso as equações obtidas dependem, evidentemente, do par constante T_0 .

2.4. CONSIDERAÇÕES SÔBRE AS EQUAÇÕES OBTIDAS

Nas secções 2.1., 2.2. e 2.3. obtivemos sistemas de equações diferenciais em termos das coordenadas generalizadas das vibrações transversais da viga.

Nos dois primeiros casos, relativos a vigas bi-engastadas, os modos próprios foram aproximados por funções de comparação e, nessas condições, é garantida a convergência das soluções em série propostas, para valores exatos (ver, p. ex., LEVINSON¹³).

Entretanto no terceiro caso, correspondente à viga bi-rotulada, os modos próprios foram aproximados por funções admissíveis e assim, a rigor, nada se pode garantir a respeito da convergência da solução (2.3.5), (2.3.6), para os valores exatos.

Consideremos, inobstante, as condições de contorno dinâmicas dêsse caso,

$$EI_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + M(x,t) \frac{\partial y_2}{\partial x} = 0 \quad (1.4.4)$$

e

$$EI_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - M(x,t) \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \quad (1.4.7)$$

para $x = 0$ e $x = L$

e ainda a expressão do momento ao longo da viga,

$$M(x,t) = T_0 + T_1 \frac{\cos \beta x}{\cos \beta L} \cos \Omega t \quad (1.3.13)$$

Se fizermos $T_0 = 0$ e limitarmos T_1 a valores suficientemente pequenos (restrições que aliás serão efetivamente impostas, não apenas por esta, como por outras razões, como veremos a seguir); além disso, se considerarmos a hipótese das pequenas curvaturas assumíveis pela viga, o que implica em $(\partial y_1 / \partial x)$ e $(\partial y_2 / \partial x)$ pequenos ao longo da mesma, então decorre de (1.4.4) e (1.4.7):

$$e \quad \left. \begin{aligned} \left| M(x,t) \frac{\partial y_2}{\partial x} \right| &\ll 1 \Rightarrow \left| EI_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \right| \ll 1 \\ \left| M(x,t) \frac{\partial y_1}{\partial x} \right| &\ll 1 \Rightarrow \left| EI_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right| \ll 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x \in [0, L] \\ (2.4.1) \end{array}$$

Por outro lado, da solução (2.3.5), (2.3.6), obtém-se imediatamente:

$$EI_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \bigg|_{\substack{x=0 \\ x=L}} = 0 \quad EI_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \bigg|_{\substack{x=0 \\ x=L}} = 0 \quad (2.4.2)$$

Comparando os resultados (2.4.1) e (2.4.2), tem-se que a solução utilizada (2.3.5), (2.3.6), também satisfaz as

condições de contorno dinâmicas, ainda que aproximadamente, ou forçando a linguagem, os termos das séries tratadas são aproximações de funções de comparação do problema.

Em vista do que foi exposto, julgamos que podem ser esperados resultados suficientemente aproximados também para o terceiro dos casos tratados.

Todavia o problema acima abordado comporta um tratamento mais rigoroso, como por exemplo, o realizado em um trabalho de HAGEDORN⁹ (sobre um determinado problema não conservativo da Estabilidade Elástica).

Dado que no presente trabalho limitamo-nos a estudar alguns problemas de estabilidade elastodinâmica que redundem na análise da estabilidade das soluções de sistemas de equações de Mathieu-Hill, deveremos considerar nulos os momentos médios T_0 no segundo e terceiro casos.

Assim, fazendo $\beta = 0$ em (2.2.4), (2.2.10) e (2.3.12), (2.3.18), tem-se para os três casos a forma geral:

$$\ddot{q}_{1r}(t) + \omega_{1r}^2 q_{1r}(t) + \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} \cdot q_{1p}(t) = 0$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (2.4.3)$$

$$\ddot{q}_{2r}(t) + \omega_{2r}^2 q_{2r}(t) - \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} \cdot q_{1p}(t) = 0$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (2.4.4)$$

$q_{1r}(t)$ - coordenadas generalizadas associadas aos modos de ordem r das vibrações flexionais da viga no plano XY .

$q_{2r}(t)$ - idem acima, no plano XZ .

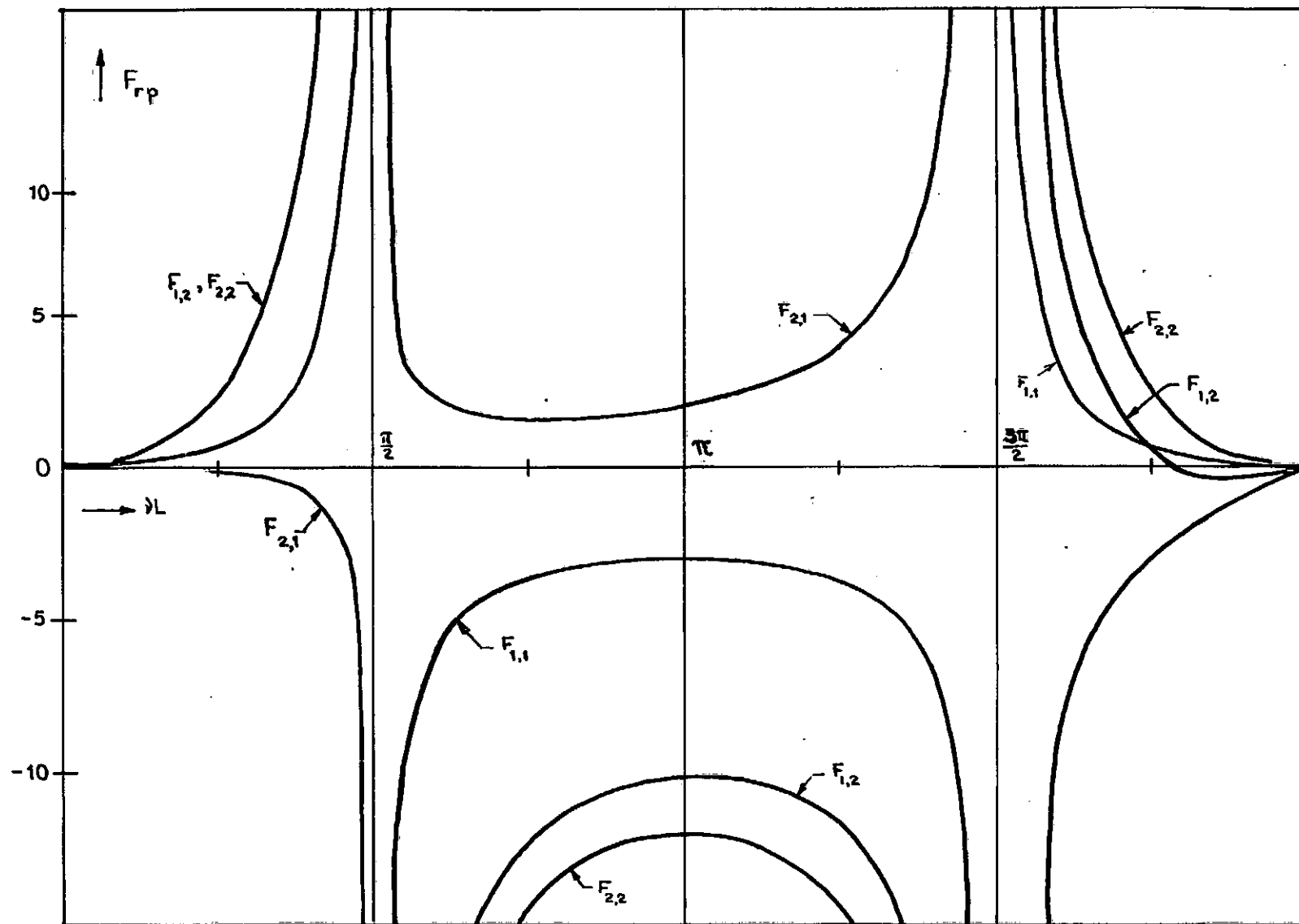
ω_{1r} - frequência natural do modo de ordem r das vibrações flexionais da viga no plano XY

ω_{2r} - idem acima, no plano XZ .

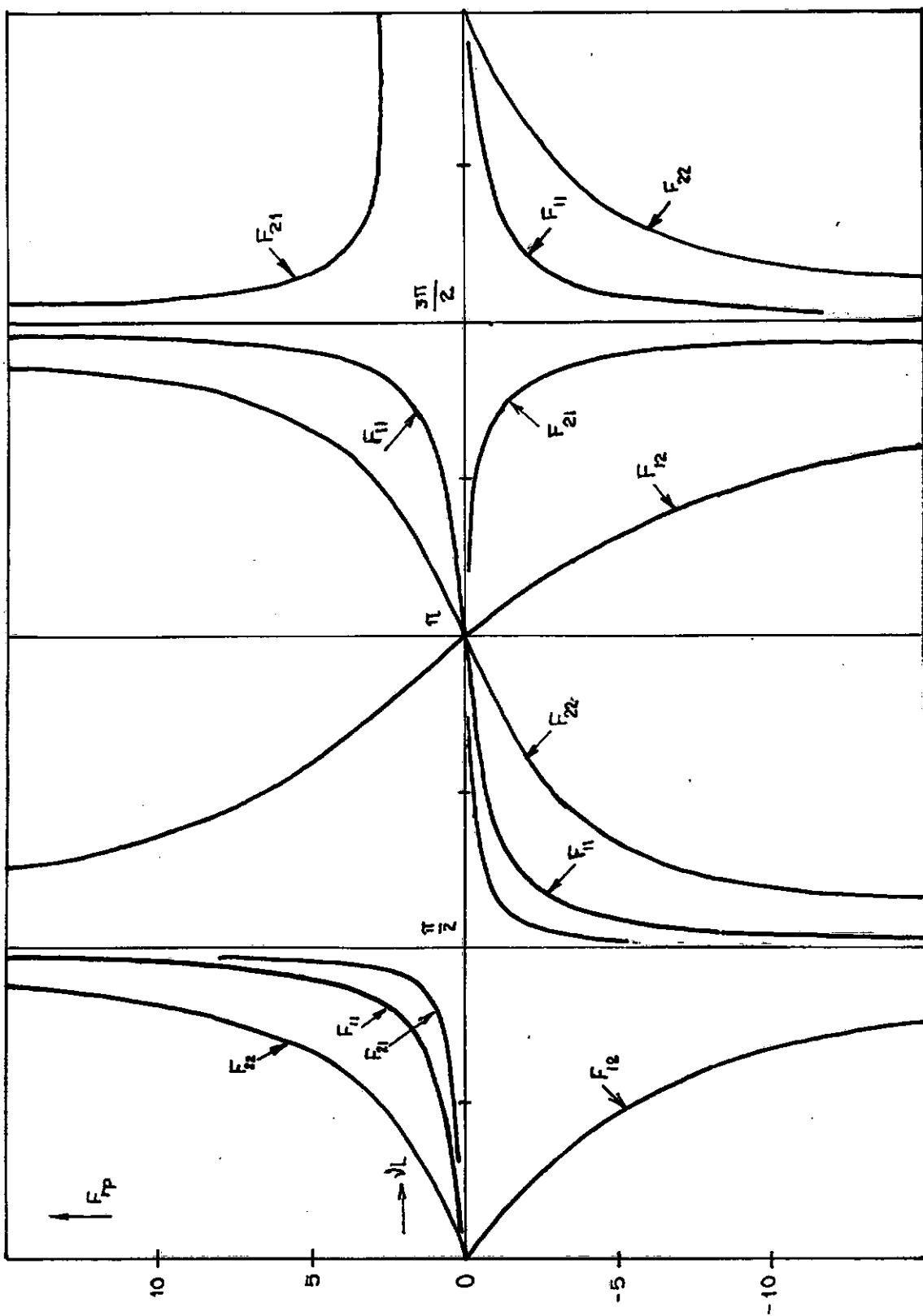
Ω - frequência de excitação, constante.

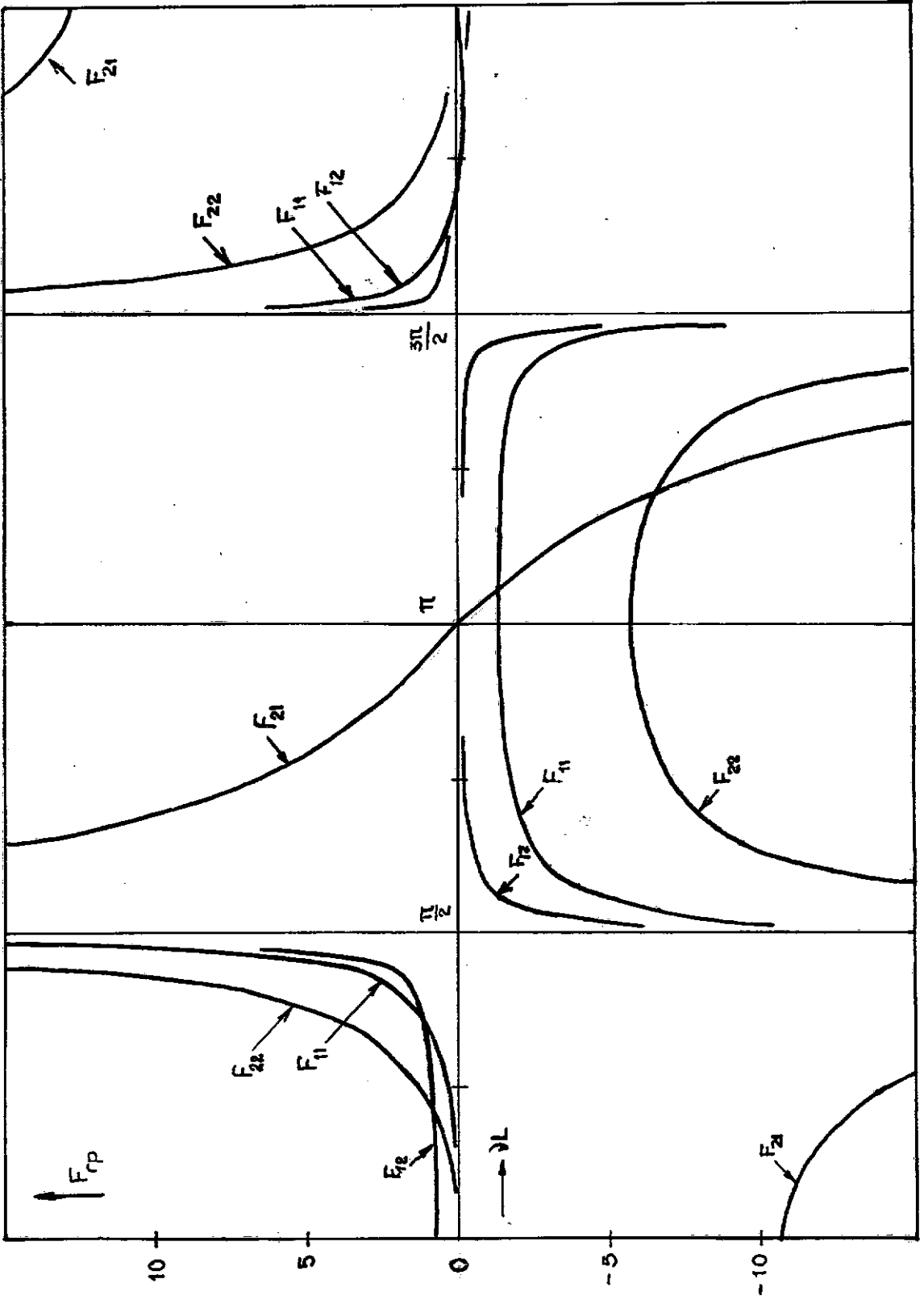
F_{rp} - parâmetro expresso em termos de r , p (ordens dos modos) e de ν .

ϵ - parâmetro pequeno (restrição a ser justificada no próximo capítulo), proporcional a T_1 .



CURVAS F_{rp} - VIGA BI-ENGASTADA À FLEXÃO - ENGASTADA À TORÇÃO

CURVAS F_{rp} - VIGA BI-ENGASTADA À FLEXÃO - LIVRE À TORÇÃO



CURVAS F_{rp} - VIGA BI-ROTULADA À FLEXÃO - ENGASTADA A TORÇÃO

CAPÍTULO III

INSTABILIDADE E RESSONÂNCIAS PARAMÉTRICAS DA VIGA

Nêste capítulo vamos, inicialmente, estudar as condições de instabilidade das soluções triviais de sistemas de equações de Mathieu-Hill para, a seguir, aplicá-las nos problemas de estabilidade elastodinâmica do trabalho que estamos desenvolvendo.

3.1. INSTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE MATHIEU

A análise que vamos apresentar nesta secção baseia-se no artigo de HSU¹, "On the Parametric Excitation of a Dynamic System having Multiple Degrees of Freedom".

Na referida análise será utilizado um método que consiste, fundamentalmente, na determinação das curvas que delimitam as zonas de instabilidade das soluções no chamado plano $\epsilon - \Omega$ a partir das condições sob as quais essas soluções são periódicas. Para tal fim, é empregada uma técnica de análise que combina o clássico método de variação dos parâmetros de Lagrange com o método da perturbação da Mecânica Não Linear, conforme o fez STRUBLE²⁰ para equações de Mathieu.

Seja então, primeiramente, o sistema de equações de MATHIEU na forma

$$\{\ddot{q}(t)\} + \left([\omega^2] + \epsilon \cos \Omega t [F] \right) \{q(t)\} = \{0\} \quad (3.1.1)$$

onde

$\{q(t)\}$ - vetor coluna das variáveis dependentes $q_1(t), q_2(t), \dots$

$\{\ddot{q}(t)\}$ - derivada segunda em relação ao tempo, do vetor anterior.

$[\omega^2]$ - matriz diagonal de constantes reais tôdas distintas entre si. ($\omega_i > 0$).

$[F]$ - matriz de constantes reais F_{rp} , $r = 1, 2, \dots$, $p = 1, 2, \dots$

Ω - constante

ϵ - parâmetro pequeno ($0 < \epsilon \ll 1$)

Deve-se ressaltar que os elementos da matriz diagonal mencionada são tais que $\omega_i \neq \omega_j$ se $i \neq j$ (o caso em que $\omega_i = \omega_j$ é estudado em artigo posterior do mesmo HSU¹²).

3.1.1. SOLUÇÕES ESTÁVEIS

Seja então a r -ésima componente do sistema (3.1.1),

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r = -\epsilon \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp}(\cos \Omega t) q_p$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (3.1.1.1)$$

As soluções não perturbadas, isto é, as correspondentes a $\epsilon = 0$, são evidentemente,

$$q_r = A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t$$

$$\dot{q}_r = \omega_r (-A_r \sin \omega_r t + B_r \cos \omega_r t)$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (3.1.1.2)$$

onde as constantes A_r e B_r são determinadas a partir dos valores iniciais $q_r(0)$ e $\dot{q}_r(0)$.

Quando $\epsilon \neq 0$, teremos as soluções ditas perturbadas. Para sua determinação, transformemos (3.1.1) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, da forma

$$\dot{q}_r = v_r$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_r + \omega_r^2 q_r &= -\epsilon \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp}(\cos \Omega t) q_p \\ r &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1.1.3)$$

Estendendo o método de Struble já mencionado, ao sistema de equações (3.1.1.3) é tomada como expressão possível da solução perturbada a que segue (lembrando que, por hipótese, $0 < \epsilon \ll 1$):

$$\begin{aligned} q_r &= A_r(t) \cos \omega_r t + B_r(t) \sin \omega_r t + \sum_{\theta=1}^{\infty} \epsilon^{\theta} q_r^{(\theta)}(t) \\ r &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1.1.4)$$

$$\begin{aligned} v_r &= \omega_r [-A_r(t) \sin \omega_r t + B_r(t) \cos \omega_r t] + \sum_{\theta=1}^{\infty} \epsilon^{\theta} \dot{q}_r^{(\theta)}(t) \\ r &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.1.1.5)$$

observando-se que os coeficientes A_r e B_r são, agora, considerados funções de tempo. Os dois primeiros termos de (3.1.1.4) e (3.1.1.5) são denominados variacionais e aqueles das séries, perturbacionais.

Substituindo (3.1.1.4) e (3.1.1.5) nas equações (3.1.1.3) e considerando, numa primeira aproximação, apenas

os termos de primeira potência em ϵ , obtem-se, após algumas operações simples, o novo sistema:

$$\dot{A}_r \cos \omega_r t + \dot{B}_r \sin \omega_r t = 0 \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.1.1.6)$$

e

$$\begin{aligned} \omega_r (-\dot{A}_r \sin \omega_r t + \dot{B}_r \cos \omega_r t) + \epsilon (\ddot{q}_r^{(1)} + \omega_r^2 q_r^{(1)}) = \\ = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} \{ A_p [\cos(\omega_p t + \Omega t) + \cos(\omega_p t - \Omega t)] + \\ + B_p [\sin(\omega_p t + \Omega t) + \sin(\omega_p t - \Omega t)] \} \\ r = 1, 2, \dots \quad (3.1.1.7) \end{aligned}$$

Nêste ponto, chega-se à concepção fundamental do método de Struble-Hsu : associar às parcelas perturbacionais da solução (i.é, $q_{r1}^{(1)}, q_{r2}^{(1)}, \dots$, nesta primeira aproximação), todos os termos da direita das equações (3.1.1.7), exceto aqueles correspondentes a termos com características ressonantes dessa mesma solução. Estes últimos termos, por sua vez, serão associados aos termos variacionais de (3.1.1.6) e (3.1.1.7).

Portanto tem-se de (3.1.1.7):

$$\ddot{q}_{tr}^{(1)} + \omega_r^2 q_{tr}^{(1)} = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} \left\{ A_p [\cos(\omega_p t + \Omega t) + \cos(\omega_p t - \Omega t)] + B_p [\sin(\omega_p t + \Omega t) + \sin(\omega_p t - \Omega t)] \right\}$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (3.1.1.8)$$

de onde, considerando-se A_p e B_p constantes, obtem-se $q_{tr}^{(1)}$ como simples solução particular de (3.1.1.8):

$$q_{tr}^{(1)} = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{F_{rp}}{\omega_r^2 - (\omega_p + \Omega)^2} [A_p \cos(\omega_p t + \Omega t) + B_p \sin(\omega_p t + \Omega t)] + \frac{F_{rp}}{\omega_r^2 - (\omega_p - \Omega)^2} [A_p \cos(\omega_p t - \Omega t) + B_p \sin(\omega_p t - \Omega t)] \right\}$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (3.1.1.9)$$

solução válida desde que $\omega_p \pm \Omega \neq \omega_r$, evidentemente.

Considerando agora (3.1.1.6) e a parte variacional de (3.1.1.7), tem-se

$$\dot{A}_r \cos \omega_r t + \dot{B}_r \sin \omega_r t = 0$$

$$r = 1, 2, \dots$$

$$\dot{A}_r \sin \omega_r t - \dot{B}_r \cos \omega_r t = 0$$

$$(3.1.1.10)$$

que, obviamente, pode ser considerado um sistema linear em \dot{A}_r e \dot{B}_r . O determinante de (3.1.1.10) é igual a 1, ou seja, diferente de zero e assim, esse sistema homogêneo pode ter apenas as soluções triviais $\dot{A}_r = 0$ e $\dot{B}_r = 0$, de onde tem-se imediatamente as soluções $A_r(t) = A_{r0}$ e $B_r(t) = B_{r0}$ constantes, que são as próprias condições iniciais do problema.

Levando-se essas constantes e (3.1.1.9) em (3.1.1.4) obtém-se a solução desejada, que será "bem comportada", isto é, não terá problemas de instabilidade.

3.1.2. SOLUÇÕES INSTÁVEIS

Se Ω é igual, ou aproximadamente igual, a $\omega_p \pm \omega_s$ para um determinado par de valores p e s , constata-se facilmente que alguns termos de (3.1.1.9), por conterem o fator $\{1/[\omega_r^2 - (\omega_p - \Omega)^2]\}$, tornam-se respectivamente infinitos ou muito grandes, ocorrendo, evidentemente, ressonância.

Com efeito, se

$$\Omega = \omega_p \pm \omega_s \quad (3.1.2.1)$$

resulta

$$\frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_p - \Omega)^2} = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega_s^2} = \infty \quad \text{se} \quad r = s \quad (3.1.2.2)$$

Considerando ainda (3.1.2.1) e o fato de que na expressão de $q_{rr}^{(1)}$ em (3.1.1.9), p é um índice mudo e portanto pode ser substituído pelo índice s , tem-se também

$$\frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_s - \Omega)^2} = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega_p^2} = \infty \quad \text{se} \quad r = p \quad (3.1.2.3)$$

Passemos agora ao estudo dos três casos possíveis de frequências de excitação ressonantes.

$$1^o \text{ CASO) } \Omega = (\omega_s + \omega_p) + \epsilon \lambda \quad \text{com} \quad p \neq s \quad (3.1.2.4)$$

onde λ - número real finito

ϵ - parâmetro pequeno

Nêste caso, as equações para a parte variacional da solução provém imediatamente de (3.1.1.6) e (3.1.1.7) e assim, levando em consideração (3.1.2.2) e (3.1.2.3), temos os sistemas:

$$\dot{A}_s \cos \omega_s t + \dot{B}_s \sin \omega_s t = 0 \quad (3.1.2.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_s \sin \omega_s t - \dot{B}_s \cos \omega_s t = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{sp}}{\omega_s} [& A_p \cos(\omega_s t + \epsilon \lambda t) - \\ & - B_p \sin(\omega_s t + \epsilon \lambda t)] \end{aligned}$$

$$\dot{A}_p \cos \omega_p t + \dot{B}_p \sin \omega_p t = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_p \sin \omega_p t - \dot{B}_p \cos \omega_p t = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{ps}}{\omega_p} [A_s \cos(\omega_p t + \epsilon \lambda t) - \\ - B_s \sin(\omega_p t + \epsilon \lambda t)] \end{aligned}$$

(3.1.2.6)

Resolvendo os sistemas (3.1.2.5) e (3.1.2.6) para \dot{A}_s , \dot{A}_p , \dot{B}_s , \dot{B}_p e fazendo $\varphi_s = \omega_s t$, $\varphi_p = \omega_p t$, obtém-se imediatamente:

$$\dot{A}_s = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{sp}}{\omega_s} [A_p \cos(\varphi_s + \epsilon \lambda t) - B_p \sin(\varphi_s + \epsilon \lambda t)] \sin \varphi_s$$

$$\dot{B}_s = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{sp}}{\omega_s} [-A_p \sin(\varphi_s + \epsilon \lambda t) + B_p \cos(\varphi_s + \epsilon \lambda t)] \cos \varphi_s$$

$$\dot{A}_p = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{ps}}{\omega_p} [A_s \cos(\varphi_p + \epsilon \lambda t) - B_s \sin(\varphi_p + \epsilon \lambda t)] \sin \varphi_p$$

$$\dot{B}_p = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{ps}}{\omega_p} [-A_s \sin(\varphi_p + \epsilon \lambda t) + B_s \cos(\varphi_p + \epsilon \lambda t)] \cos \varphi_p$$

(3.1.2.7)

Tendo em vista agora, que as quatro derivadas acima são proporcionais ao parâmetro pequeno ϵ , conclui-se que

A_s , B_s , A_p e B_p variam lentamente com t . Portanto, nos intervalos $(2\pi/\omega_s)$ e $(2\pi/\omega_p)$, $(\varphi_s + \epsilon\lambda t)$ e $(\varphi_p + \epsilon\lambda t)$ aumentarão aproximadamente de 2π , enquanto que A_s , B_s , A_p e B_p não se alteram apreciavelmente. Diante dessas considerações, este método recorre à chamada aproximação de Kryloff-Bogoliuboff (ver p. ex., PIPES¹⁹), isto é, toma os valores médios das derivadas (3.1.2.7) nos intervalos $\varphi_s \in [0, 2\pi]$ e $\varphi_p \in [0, 2\pi]$, considerando-se A_s , B_s , A_p e B_p constantes. Resulta, assim,

$$\dot{A}_s = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{F_{sp}}{\omega_s} \int_0^{2\pi} [A_p \cos(\varphi_s + \epsilon\lambda t) - B_p \sin(\varphi_s + \epsilon\lambda t)] \sin \varphi_s \cdot d\varphi_s$$

$$\dot{B}_s = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{F_{sp}}{\omega_s} \int_0^{2\pi} [-A_p \cos(\varphi_s + \epsilon\lambda t) + B_p \sin(\varphi_s + \epsilon\lambda t)] \cos \varphi_s \cdot d\varphi_s$$

$$\dot{A}_p = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{F_{ps}}{\omega_p} \int_0^{2\pi} [A_s \cos(\varphi_p + \epsilon\lambda t) - B_s \sin(\varphi_p + \epsilon\lambda t)] \sin \varphi_p \cdot d\varphi_p$$

$$\dot{B}_p = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{F_{ps}}{\omega_p} \int_0^{2\pi} [-A_s \cos(\varphi_p + \epsilon\lambda t) + B_s \sin(\varphi_p + \epsilon\lambda t)] \cos \varphi_p \cdot d\varphi_p$$

(3.1.2.8)

ou após as integrações:

$$\dot{A}_s = -\frac{\epsilon}{4} \frac{F_{sp}}{\omega_s} [A_p \sin \epsilon \lambda t + B_p \cos \epsilon \lambda t]$$

$$\dot{B}_s = -\frac{\epsilon}{4} \frac{F_{sp}}{\omega_s} [A_p \cos \epsilon \lambda t - B_p \sin \epsilon \lambda t]$$

$$\dot{A}_p = -\frac{\epsilon}{4} \frac{F_{ps}}{\omega_p} [A_s \sin \epsilon \lambda t + B_s \cos \epsilon \lambda t]$$

$$\dot{B}_p = -\frac{\epsilon}{4} \frac{F_{ps}}{\omega_p} [A_s \cos \epsilon \lambda t - B_s \sin \epsilon \lambda t]$$

(3.1.2.9)

Para a resolução do sistema (3.1.2.9), é conveniente fazer as seguintes substituições (onde $i = \sqrt{-1}$):

$$\begin{aligned} X_1 &= A_s + iB_s & Y_1 &= A_p + iB_p \\ X_2 &= A_s - iB_s & Y_2 &= B_p - iB_p \end{aligned} \quad (3.1.2.10)$$

Tem-se então para (3.1.2.9):

$$\dot{X}_1 = -\frac{\epsilon}{4\omega_s} i F_{sp} e^{-i\epsilon \lambda t} Y_2 \quad (3.1.2.11)$$

$$\dot{X}_2 = -\frac{\epsilon}{4\omega_s} i F_{sp} e^{i\epsilon \lambda t} X_2 \quad (3.1.2.12)$$

$$\dot{Y}_1 = -\frac{\epsilon}{4\omega_p} i F_{ps} e^{-i\epsilon\lambda t} X_2 \quad (3.1.2.13)$$

$$\dot{Y}_2 = -\frac{\epsilon}{4\omega_p} i F_{ps} e^{i\epsilon\lambda t} X_1 \quad (3.1.2.14)$$

Considerem-se agora as equações (3.1.2.11) e (3.1.2.14). Derivando a primeira em relação a t e substituindo nêsse resultado a segunda, vem:

$$\ddot{X}_1 + \epsilon\lambda i \dot{X}_1 - \frac{\epsilon^2 F_{sp} F_{ps}}{16 \omega_s \omega_p} = 0$$

de onde resulta a equação característica

$$Y^2 + \epsilon\lambda i Y - \frac{\epsilon^2 F_{sp} F_{ps}}{16 \omega_s \omega_p} = 0$$

onde

$$Y = -\frac{\epsilon\lambda i}{2} \pm \frac{\epsilon}{4} \left[\frac{F_{sp} F_{ps}}{\omega_s \omega_p} - 4\lambda^2 \right]^{1/2} \quad (3.1.2.15)$$

Tem-se portanto, de acôrdo com a teoria das EDOL:

$$X_1 = X_{10} \exp \left\{ -\frac{\epsilon\lambda i t}{2} \pm \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{F_{sp} \cdot F_{ps}}{\omega_s \cdot \omega_p} - 4\lambda^2 \right)^{1/2} t \right\} \quad (3.1.2.17)$$

$$Y_2 = Y_{20} \exp \left\{ \frac{\epsilon \lambda i t}{2} \pm \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{F_{sp} \cdot F_{ps}}{\omega_s \cdot \omega_p} - 4 \lambda^2 \right)^{1/2} t \right\} \quad (3.1.2.17)$$

De (3.1.2.12) e (3.1.2.13) obtem-se, análogamente,

$$X_2 = X_{20} \exp \left\{ \frac{\epsilon \lambda i t}{2} \pm \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{F_{sp} \cdot F_{ps}}{\omega_s \cdot \omega_p} - 4 \lambda^2 \right)^{1/2} t \right\} \quad (3.1.2.18)$$

$$Y_1 = Y_{10} \exp \left\{ \frac{\epsilon \lambda i t}{2} \pm \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{F_{sp} \cdot F_{ps}}{\omega_s \cdot \omega_p} - 4 \lambda^2 \right)^{1/2} t \right\}$$

Uma simples inspeção nas expressões de (3.1.2.16) a (3.1.2.19) indica que a parcela real de seus expoentes é comum às quatro expressões. Seu coeficiente Γ , usualmente chamado expoente característico, é dado por

$$\Gamma = \pm \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{F_{sp} \cdot F_{ps}}{\omega_s \cdot \omega_p} - 4 \lambda^2 \right)^{1/2} \quad (3.1.2.20)$$

Assim, de acordo com a teoria elementar das oscilações, teremos

$\Gamma > 0$ - soluções instáveis (ressonantes)

$\Gamma = 0$ - soluções estáveis (harmônicas)

$\Gamma < 0$ - soluções assintoticamente estáveis

(por extensão de linguagem, "amortecidas").

(3.1.2.21)

Considerando então a expressão do expoente característico Γ dada por (3.1.2.20) e as condições (3.1.2.21), tem-se instabilidade quando

$$\pm \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{F_{sp} \cdot F_{ps}}{\omega_s \cdot \omega_p} - 4\lambda^2 \right)^{1/2} > 0 \quad (3.1.2.22)$$

Levando-se em conta que de (3.1.2.4) tem-se $\lambda = [\Omega - (\omega_s + \omega_p)] / \epsilon$ e que por (3.1.2.2) pode-se fazer $r = s$, resulta de (3.1.2.22):

$$\frac{\epsilon^2}{4} \frac{F_{rp} \cdot F_{pr}}{\omega_r \cdot \omega_p} > [\Omega - (\omega_r + \omega_p)]^2 > 0$$

ou

$$\frac{\epsilon}{2} \left| \left[\frac{F_{rp} \cdot F_{pr}}{\omega_r \cdot \omega_p} \right] \right|^{1/2} > \Omega - (\omega_r + \omega_p)$$

Após algumas transformações simples, conclui-se que ocorre INSTABILIDADE quando a frequência de excitação Ω_R (ressonante) satisfaz a relação

$$(\omega_r + \omega_p) - \frac{\epsilon}{2} \left[\frac{F_{rp} F_{pr}}{\omega_r \omega_p} \right]^{1/2} < \Omega_R < (\omega_r + \omega_p) + \frac{\epsilon}{2} \left[\frac{F_{rp} F_{pr}}{\omega_r \omega_p} \right]^{1/2}$$

$$F_{rp} F_{pr} > 0 \quad (3.1.2.22)$$

$$2^{\text{o}} \text{ CASO) } \Omega = 2 \omega_s + \epsilon \lambda \quad (3.1.2.23)$$

Considerando novamente o fator $\{1/[\omega_r^2 - (\omega_p - \Omega)^2]\}$ de $q_r^{(1)}$ (ver (3.1.1.9)), tem-se que quando Ω é dado por (3.1.2.23) e para $r = p = s$, que êsse fator tende a infinito com ϵ tendendo a zero. Nessas condições, os termos por êle afetados assumem características ressonantes.

Associando tais termos às parcelas variacionais de (3.1.1.6) e (3.1.1.7), tem-se:

$$\dot{A}_s \cos \omega_s t + \dot{B}_s \sin \omega_s t = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_s \sin \omega_s t - \dot{B}_s \cos \omega_s t = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{ss}}{\omega_s} \left[A_s \cos(\omega_s t - \Omega t) + \right. \\ \left. + B_s \sin(\omega_s t - \Omega t) \right] \end{aligned}$$

Procedendo-se como no caso anterior, conclui-se que o critério obtido é o mesmo se fazemos $p = r$ naquelas fórmulas, isto é, haverá INSTABILIDADE para frequências de excitação Ω_R que satisfaçam a relação

$$2 \omega_r - \frac{\epsilon}{2} \frac{|F_{rr}|}{\omega_r} < \Omega_R < 2 \omega_r + \frac{\epsilon}{2} \frac{|F_{rr}|}{\omega_r}$$

$$(3.1.2.24)$$

$$3^{\text{o}} \text{ CASO) } \Omega = \omega_s - \omega_p + \epsilon \lambda \quad \omega_s > \omega_p \quad (3.1.2.25)$$

Nêste caso, temos as seguintes equações diferenciais para a parte variacional da solução:

$$\dot{A}_s \cos \omega_s t + \dot{B}_s \sin \omega_s t = 0$$

$$\dot{A}_s \sin \omega_s t - \dot{B}_s \cos \omega_s t = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{sp}}{\omega_s} \left[A_s \cos(\omega_s t - \epsilon \lambda t) + B_s \sin(\omega_s t - \epsilon \lambda t) \right]$$

$$\dot{A}_p \cos \omega_p t + \dot{B}_p \sin \omega_p t = 0$$

$$\dot{A}_p \sin \omega_p t - \dot{B}_p \cos \omega_p t = \frac{\epsilon}{2} \frac{F_{ps}}{\omega_p} \left[A_p \cos(\omega_p t + \epsilon \lambda t) + B_p \sin(\omega_p t + \epsilon \lambda t) \right]$$

Procedendo-se análogamente ao primeiro caso, obtem-se o expoente característico

$$\Gamma = \pm \frac{\epsilon}{4} \left(-\frac{F_{sp} F_{ps}}{\omega_s \omega_p} - 4 \lambda^2 \right)^{1/2}$$

Sendo aqui $\lambda = [\Omega - (\omega_s - \omega_p)]/\epsilon$, e ainda levando em conta que podemos fazer $s = r$, resulta:

$$-\frac{\epsilon^2}{4} \frac{F_{pr} \cdot F_{pr}}{\omega_r \omega_p} \leq [\Omega - (\omega_r - \omega_p)]^2 \begin{cases} \text{soluções instáveis} \\ \text{soluções estáveis} \\ \text{soluções assint.est.} \end{cases}$$

Conclui-se que ocorre INSTABILIDADE quando a frequência de excitação Ω_R satisfaz a relação

$$(\omega_r - \omega_p) - \frac{\epsilon}{2} \left[-\frac{F_{rp} \cdot F_{pr}}{\omega_r \omega_p} \right]^{1/2} < \Omega_R < (\omega_r - \omega_p) + \frac{\epsilon}{2} \left[-\frac{F_{rp} \cdot F_{pr}}{\omega_r \omega_p} \right]^{1/2}$$

$$F_{rp} \cdot F_{pr} < 0 \quad (3.1.2.26)$$

No primeiro e terceiro dos casos estudados, as frequências de excitação ressonantes para $\epsilon = 0$ são dadas, como se vê, por "combinações" de frequências naturais, razão pela qual êsses casos são denominados de ressonâncias paramétricas de 2a. espécie ou ressonâncias combinatórias. O mesmo não se passa com o segundo caso, denominado ressonância paramétrica de 1a. espécie ou simplesmente, ressonância paramétrica.

3.2. INSTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE HILL

Nesta secção vamos estender a aplicação dos resultados anteriores a sistemas de equações de HILL da forma

$$\left\{ \ddot{q}(t) \right\} + \left(\left[\omega^2 \right] + \epsilon \left[B(t) \right] \right) \left\{ q(t) \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

onde

$$\left[B(t) \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[F \right]^{(m)} \cos m \Omega t + \left[G \right]^{(m)} \sin m \Omega t \right) \quad (3.1.3.1)$$

e os demais elementos já foram definidos na pág. 61.

Evidentemente (3.1.3.1) pode ser escrita na forma

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r = -\epsilon \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left(F_{rp}^{(m)} \cos m \Omega t + G_{rp}^{(m)} \sin m \Omega t \right) q_p$$

$$r = 1, 2, \dots \quad (3.1.3.2)$$

e então torna-se quase imediata a aplicação dos métodos e resultados anteriores para cada um dos 'm' do duplo somatório

$$\sum_m \sum_p F_{rp}^{(m)} \cos m \Omega t.$$

O tratamento de equações com $\sum_m \sum_p G_{rp}^{(m)} \sin m \Omega t$ apresenta diferenças puramente algébricas em relação ao caso anterior. Finalmente, dada a linearidade das equações, pode-

se aplicar a superposição.

Portanto, para estudarmos as condições de instabilidade da solução trivial de (3.1.3.1) podemos dispensar grande parte dos detalhes expostos nas secções anteriores.

Assim, as soluções estáveis de (3.1.3.1 ou 2) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 q_r^{(1)} = & -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_p + m\Omega)^2} \left[(F_{rp}^{(m)} A_p - G_{rp}^{(m)} B_p) \cos(\omega_p t + m\Omega t) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (F_{rp}^{(m)} B_p + G_{rp}^{(m)} A_p) \sin(\omega_p t + m\Omega t) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_p - m\Omega)^2} \left[(F_{rp}^{(m)} A_p + G_{rp}^{(m)} B_p) \cos(\omega_p t - m\Omega t) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (F_{rp}^{(m)} B_p - G_{rp}^{(m)} A_p) \sin(\omega_p t - m\Omega t) \right] \right\} \\
 & r = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{3.1.3.3}$$

É óbvio que os termos contendo o fator $\{1/[\omega_r^2 - (\omega_p - m\Omega)^2]\}$ tornam-se ressonantes quando $\Omega = (\omega_s \pm \omega_p)/m$, para determinados valores de p , s e m .

Vamos, a seguir, analisar três casos de instabilidade.

$$1^\circ \text{ CASO) } \Omega = \frac{\omega_s + \omega_p}{m} + \epsilon\lambda, \quad p \neq s \tag{3.1.3.4}$$

Associando os termos com características ressonantes

à parte variacional da análise, tem-se:

$$\dot{A}_s \cos \omega_s t + \dot{B}_s \sin \omega_s t = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_s \sin \omega_s t - \dot{B}_s \cos \omega_s t = \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\omega_s} \left[\left(F_{sp}^{(m)} A_p + G_{sp}^{(m)} B_p \right) \cos(\omega_s t + \epsilon \lambda m t) \right. \\ \left. - \left(F_{sp}^{(m)} B_p - G_{sp}^{(m)} A_p \right) \sin(\omega_s t + \epsilon \lambda m t) \right] \end{aligned}$$

e

$$\dot{A}_p \cos \omega_p t + \dot{B}_p \sin \omega_p t = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_p \sin \omega_p t - \dot{B}_p \cos \omega_p t = \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\omega_p} \left[\left(F_{ps}^{(m)} A_s + G_{ps}^{(m)} B_s \right) \cos(\omega_p t + \epsilon \lambda m t) \right. \\ \left. - \left(F_{ps}^{(m)} B_s - G_{ps}^{(m)} A_s \right) \sin(\omega_p t + \epsilon \lambda m t) \right] \end{aligned}$$

Resolvendo os sistemas acima para \dot{A}_s , \dot{B}_s , \dot{A}_p e \dot{B}_p , aplicando a aproximação de Kriloff-Bogoliuboff e fazendo as substituições (3.1.2.10), ter-se-á imediatamente:

$$X_1 = X_{10} e^{\psi t - \frac{1}{2} \epsilon \lambda m t i}$$

$$Y_2 = Y_{20} e^{\psi t + \frac{1}{2} \epsilon \lambda m t i}$$

onde

$$\psi = \pm \frac{\epsilon}{4} \left[\frac{1}{\omega_s \omega_p} (F_{sp}^{(m)} + iG_{sp}^{(m)}) (F_{ps}^{(m)} - iG_{ps}^{(m)}) - 4m\lambda^2 \right]^{1/2}$$

e

$$X_2 = X_{20} e^{\rho t + \frac{1}{2} \epsilon \lambda m t i} \quad Y_1 = Y_{10} e^{\rho t - \frac{1}{2} \epsilon \lambda m t i}$$

onde

$$\rho = \pm \frac{\epsilon}{4} \left[\frac{1}{\omega_s \omega_p} (F_{sp}^{(m)} - iG_{sp}^{(m)}) (F_{ps}^{(m)} + iG_{ps}^{(m)}) - 4m^2 \lambda^2 \right]^{1/2}$$

Para a ocorrência de instabilidade, é evidente que as parcelas reais de ψ e ρ , aliás comuns a ambas, devem ser positivas.

Depois de algumas operações simples, chega-se finalmente à condição de INSTABILIDADE para este caso:

$$\left[\frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2} > 0$$

com

$$\alpha = \frac{1}{\omega_r \omega_p} \left[F_{rp}^{(m)} F_{pr}^{(m)} + G_{rp}^{(m)} G_{pr}^{(m)} \right] - 4m^2 \lambda^2$$

$$\beta = -\frac{1}{\omega_r \omega_p} \left[F_{rp}^{(m)} G_{rp}^{(m)} - F_{pr}^{(m)} G_{rp}^{(m)} \right]$$

$$\lambda = \frac{1}{\epsilon} \left[\Omega_R - \frac{\omega_r + \omega_p}{m} \right] \quad (3.1.3.5)$$

$$2^{\text{o}} \text{ CASO) } \Omega = \frac{2\omega_s}{m} + \epsilon\lambda \quad (3.1.3.6)$$

São aplicáveis as mesmas fórmulas (3.1.3.5) fazendo-se $p = r$.

$$3^{\text{o}} \text{ CASO) } \Omega = \frac{\omega_s - \omega_p}{m} + \epsilon\lambda, \quad \omega_s > \omega_p \quad (3.1.3.7)$$

Como condição de INSTABILIDADE, tem-se

$$\left[\frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2} > 0$$

$$e \quad \alpha = - \frac{1}{\omega_r \cdot \omega_p} \left[F_{rp}^{(m)} F_{rp}^{(m)} + G_{rp}^{(m)} G_{pr}^{(m)} \right] - 4m^2 \lambda^2$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_r \cdot \omega_p} \left[F_{rp}^{(m)} G_{pr}^{(m)} - F_{pr}^{(m)} G_{rp}^{(m)} \right]$$

$$\lambda = \frac{1}{\epsilon} \left[\Omega_R - \frac{\omega_r - \omega_p}{m} \right] \quad (3.1.3.8)$$

Em todos êstes três casos, 'm' designará a ordem da ressonância paramétrica.

3.3. APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE INSTABILIDADE AOS PROBLEMAS EM ESTUDO

Nesta secção vamos fazer algumas considerações sobre a aplicação às equações (2.4.3), (2.4.4), das condições de instabilidade estudadas na secção anterior.

Para tal fim, é conveniente escrever as equações acima referidas, na forma:

$$\ddot{q}_{ir} + \omega_{ir}^2 q_{ir} + \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} q_{jp} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\ddot{q}_{jr} + \omega_{jr}^2 q_{jr} - \epsilon \cos \Omega t \sum_{p=1}^{\infty} F_{rp} q_{ip} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$r = 1, 2, \dots$$

$$i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad i \neq j$$

a) Inicialmente, observe-se que é suficiente analisar apenas as condições de instabilidade das soluções triviais do sistema (3.2.1), pois as condições de instabilidade correspondentes às soluções triviais de (3.2.2) são exatamente as mesmas (já que, obviamente, $F_{rp} \cdot F_{pr} = (-F_{rp}) \cdot (-F_{pr})$, produtos êsses considerados nas fórmulas que delimitam as regiões de instabilidades paramétricas).

b) Da condição $i \neq j$ das equações (3.2.1), conclui-se imediatamente que ocorrem ressonâncias paramétricas exclusivamente entre modos flexionais pertencentes a diferentes planos principais de vibração da viga.

c) Como pode ser observado em todos os três casos de vinculação da viga, as frequências naturais ω_{1n} e ω_{2n} , correspondentes a modos de mesma ordem dos dois planos de vibração da viga diferem entre si apenas pelas respectivas rigidezes. Ora, foi visto que as condições de instabilidade estudadas anteriormente são válidas apenas quando todas as frequências naturais do sistema são diferentes entre si. Fica assim justificada a hipótese formulada na secção 1.1., de que os momentos principais de inércia das secções da viga devem ser diferentes entre si.

d) Uma característica interessante dos casos de instabilidade elastodinâmica tratados, é que em nenhum deles ocorre ressonância paramétrica de primeira espécie. Com efeito, ainda que seja $r = p = s$, temos, por hipótese, $i \neq j$, isto é, ressonâncias entre modos de mesma ordem, mas distintos por pertencerem a planos de vibração distintos. Enfim, em qualquer hipótese, sempre teremos aqui, ressonâncias entre modos distintos, e portanto ressonâncias paramétricas de segunda espécie ou, simplesmente, ressonâncias combinatórias.

e) Por outro lado, poderemos ter ressonâncias combinatórias tanto para frequências de excitação Ω_R dadas por $\omega_{ir} + \omega_{jp}$, quanto dadas por $|\omega_{ir} - \omega_{jp}|$, pois conforme se vê pelas curvas F_{rp} dos três casos (ver págs. 57, 58 e 59), tanto poderemos ter $F_{rp} \cdot F_{pr} > 0$ como $F_{rp} \cdot F_{pr} < 0$ (êste caso só é possível quando $r \neq p$, evidentemente).

f) Observe-se pelas expressões de F_{rp} correspondentes aos três casos de vinculação da viga, que se $\gamma L = (2n-1)\pi/2$, $n=1,2,\dots$, F_{rp} torna-se infinito. Assim, fique estabelecido que as análises de condições de instabilidade dêste trabalho são válidas desde que

$$\gamma L \neq (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad n=1,2,\dots \quad (3.2.3)$$

g) Uma vez que γL se situe no entorno de $\{(2n-1)\pi/2\}$ teremos valores de F_{rp} muito grandes. Esse fato implica em regiões de instabilidade mais amplas, como se depreende facilmente por simples inspeções em (3.1.2.22) e (3.1.2.26).

Inobstante (3.2.2), assumo-se provisoriamente

$$\gamma L = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad n=1,2,\dots \quad (3.2.4)$$

Chamando de frequência ressonante de corte, Ω_{R0} , aquela correspondente a $\epsilon = 0$, isto é,

$$\Omega_{R0} = |\omega_{1r} \pm \omega_{2p}| \quad (3.2.5)$$

e considerando que $\gamma = \Omega / C$ (1.3.7), vem pela substituição desta e de (3.2.5) em (3.2.4):

$$\frac{|\omega_{1r} \pm \omega_{2p}|}{C} L = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (3.2.6)$$

Denominando de comprimentos críticos da viga, L_{CR} aqueles que satisfazem a relação anterior, temos:

$$L_{CR} = \frac{(n - 0,5) \pi C}{|\omega_{1r} \pm \omega_{2p}|} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.7)$$

(+) para $F_{rp} \cdot F_{pr} > 0$

(-) " $F_{rp} \cdot F_{pr} < 0$

O que se deve fixar então, é que, para comprimentos da viga nos entornos dos L_{CR} , teremos regiões de instabilidade amplas.

Uma hipótese que talvez mereça uma investigação aprofundada é a de que, se levados em conta não linearidades e amortecimentos inerentes a um modelo mais próximo do real para a viga, obtenham-se maiores amplitudes para suas vibrações transversais exatamente nas regiões associadas a êsses comprimentos críticos.

h) Tendo em vista o estudo realizado sobre estabilidade das soluções de sistemas de equações de Hill, podemos generalizar a excitação pulsante, originalmente restrita a pares harmônicos a

- pares de excitação periódicos quaisquer no caso de vigas bi-engastadas à flexão e engastadas à torção.
- pares de excitação periódicos com valores médios nulos nos casos de vigas bi-engastadas à flexão e livres à torção e de vigas bi-rotuladas à flexão e engastadas à torção (foi visto no capítulo II que T_0 deveria ser nulo nêstes casos).

1) Finalmente, considere-se que em todos os casos de vinculação da viga, o parâmetro ϵ é proporcional a (T_1 / mL^3) . Por outro lado, esta análise é válida para $0 < \epsilon \ll 1$. Conclui-se imediatamente que as condições de instabilidade paramétricas estudadas são válidas para pares de excitação pulsantes de amplitudes suficientemente pequenas e/ou massas por unidade de comprimento da viga suficientemente grandes e/ou comprimentos de viga suficientemente grandes.

Observe-se, no entanto, que conforme foi visto na secção 2.4., quanto a vigas bi-rotuladas à flexão e engastadas à torção, deveremos ter, necessariamente, T_1 com valores pequenos.

Depois dessas considerações, só nos resta aplicar as condições de instabilidade paramétrica a modelos de viga com parâmetros definidos numericamente. É o que vamos fazer no capítulo que segue.

CAPÍTULO IV

ALGUNS RESULTADOS NUMÉRICOS

Nêste capítulo não pretendemos realizar uma prospecção exaustiva de resultados numéricos, mas simplesmente, através de alguns exemplos, objetivar a análise desenvolvida nos capítulos anteriores.

Todavia, os programas para computação digital foram organizados de tal modo que com simples troca dos cartões de dados, podem ser obtidos os resultados correspondentes a vigas com outras características construtivas, desde que sejam respeitadas as restrições formuladas na secção 1.1. .

Os programas dêste capítulo estão formulados em linguagem FORTRAN II e foram processados em computador IBM 1130 com 32 K de memória do NCE/UFRJ.

4.1. DETERMINAÇÃO DAS REGIÕES DE INSTABILIDADE ELASTODINÂMICA DA VIGA

Vamos aqui considerar apenas as regiões de instabilidade (RIED) correspondentes ao primeiro e ao segundo modos das vibrações flexionais da viga, isto porque, geralmente são

essas as regiões de maior interesse tecnológico (devido a maiores possibilidades de ocorrência), além de que são as que oferecem resultados numéricos mais confiáveis (pois, como vimos, as RIED são delimitadas por funções das frequências naturais e é sabido que quanto mais alta a ordem destas, menos exatas são suas determinações).

Seja então uma viga de aço doce uniforme, de secção retangular, com as seguintes características:

$E = 21.10^9 \text{ kgf.m}^{-2}$ - módulo de elasticidade longitudinal

$G = 8,05.10^9 \text{ kgf.m}^{-2}$ - " " " transversal

$\rho = 800 \text{ kgf.m}^{-4}.\text{s}^2$ - massa específica

$b = 0,10 \text{ m}$ - largura da secção transversal

$h = 0,05 \text{ m}$ - altura " " "

L - a ser fixada no programa - comprimento

P - a ser fixada no programa - força axial

($P > 0$ - compressão ; $P < 0$ - tração)

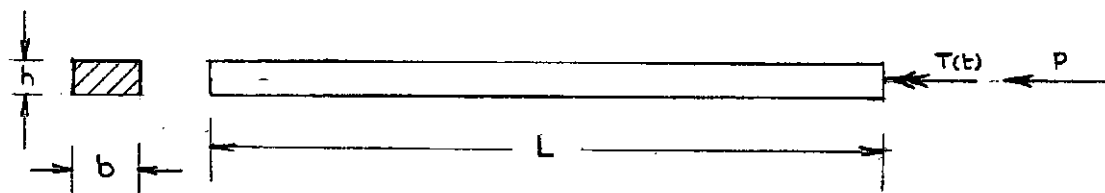


FIG. 8

Com êsses dados obteve-se imediatamente os seguintes parâmetros necessários à determinação das RIED:

$$m = 4 \text{ kgf} \cdot \text{m}^{-3} \text{s}^2 \text{ - massa por unidade de comprimento}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = 1,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\ I_2 = 4,16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \end{array} \right\} \text{ - momentos de inércia principais da secção}$$

$$\frac{EI_1}{m} = 5460 \text{ m}^5 \text{s}^{-2}$$

$$\frac{EI_2}{m} = 21840 \text{ m}^5 \text{s}^{-2}$$

$$k = 0,246 \text{ (ver TIMOSHENKO \& GOODIER}^{22}, \text{pág. 277)}$$

$$C = 1565 \text{ ms}^{-1} \text{ (ver (1.3.3))}$$

Suponhamos agora o caso da

VIGA BI-ENGASTADA À FLEXÃO E ENGASTADA À TORÇÃO

Em primeiro lugar atente-se ao fato de que P deve ser menor que a carga crítica à flambagem $P_{\text{crit.}}$, nêste caso, dada por

$$P_{\text{crit}} = EI_1 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \quad (4.1.1)$$

De acordo com (2.1.20) e (2.1.24) temos as frequências naturais:

$$\omega_{1r} = \left[5460 \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^4 - 0,25 P \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.1.2)$$

$$\omega_{2r} = \left[21840 \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^4 - 0,25 P \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.1.3)$$

Designando por frequências de ressonância combinatória Ω_{RO} aquelas correspondentes a $\epsilon = 0$ (ver (3.1.2.22) e (3.1.2.26)), tem-se

$$\Omega_{RO} = \omega_{1r} + \omega_{2p} \quad \text{se} \quad F_{rp} \cdot F_{pr} > 0 \quad (4.1.4)$$

ou

$$\Omega_{RO} = |\omega_{1r} - \omega_{2p}| \quad \text{se} \quad F_{rp} \cdot F_{pr} < 0 \quad (4.1.5)$$

Por outro lado, designemos por Ω_{RE} e Ω_{RD} as frequências de ressonância combinatória que delimitam as RIED à esquerda e à direita, respectivamente ($\epsilon \neq 0$).

Tem-se então

$$\Omega_{RE} = \Omega_{RO} - \epsilon \Delta \quad (4.1.7)$$

$$\Omega_{RD} = \Omega_{RO} + \epsilon \Delta \quad (4.1.8)$$

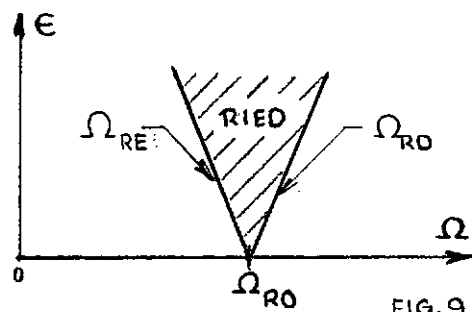


FIG. 9

onde

$$\Delta = 0,5 \left[\frac{F_{rp}(\Delta L) \cdot F_{pr}(\Delta L)}{\omega_{1r} \cdot \omega_{2p}} \right]^{1/2} \quad (4.1.9)$$

Nêste caso, como se viu, $F_{rp}(\Delta L)$ e $F_{pr}(\Delta L)$ são dados por (2.1.22). De acôrdo com (1.3.7) tem-se

$$\Delta L = \frac{\Omega_{R0}}{c} L = 0,00064 (|\omega_{1r} \pm \omega_{2p}|) L \quad (4.1.10)$$

Antes de passarmos à fase de programação pròpriamente dita, observe-se que considerando $\epsilon^* = 0,3$ (êste é, de um modo geral, o valor máximo admissível para um parâmetro pequeno por definição), tem-se, a seguir, alguns valôres correspondentes para a amplitude T_1^* do torque harmônico de excitação (ver (2.1.21)):

$$\begin{aligned} L = 1 \text{ m} & \quad T_1^* = 0,0152 \text{ mkgf} \\ L = 2 \text{ m} & \quad T_1^* = 0,1216 \text{ mkgf} \\ L = 4 \text{ m} & \quad T_1^* = 2,4320 \text{ mkgf} \\ L = 8 \text{ m} & \quad T_1^* = 9,7280 \text{ mkgf} \end{aligned}$$

(pelo que se constata a relativa pequenez dos valôres máximos admissíveis para T_1^* , nesta análise).

Damos a seguir a correspondência entre os símbolos usados no desenvolvimento teórico e no programa:

L _____	HL	} CARACTERÍSTICAS DE CONSTRUÇÃO
P _____	P	
P _{crit} _____	PCRIT	
(1/C) _____	AK	
(EI ₁ /m) _____	BK	
(1/m) _____	CK	
(EI ₂ /m) _____	DK	
2π _____	PY2	

r _____ I (e M ou N)

p _____ J (e N ou M)

√L _____ ARGØ (I,J)

F_{rp} _____ F(I,J)

F_{pr} _____ F(J,I)

ε _____ EPSLN (MAG)

Δ _____ HLAND (I,J)

Ω_{RO} _____ VERT (I,J)

Ω_{RE} _____ ØMEL (I,J,MAG)

Ω_{RD} _____ ØMER (I,J,MAG)

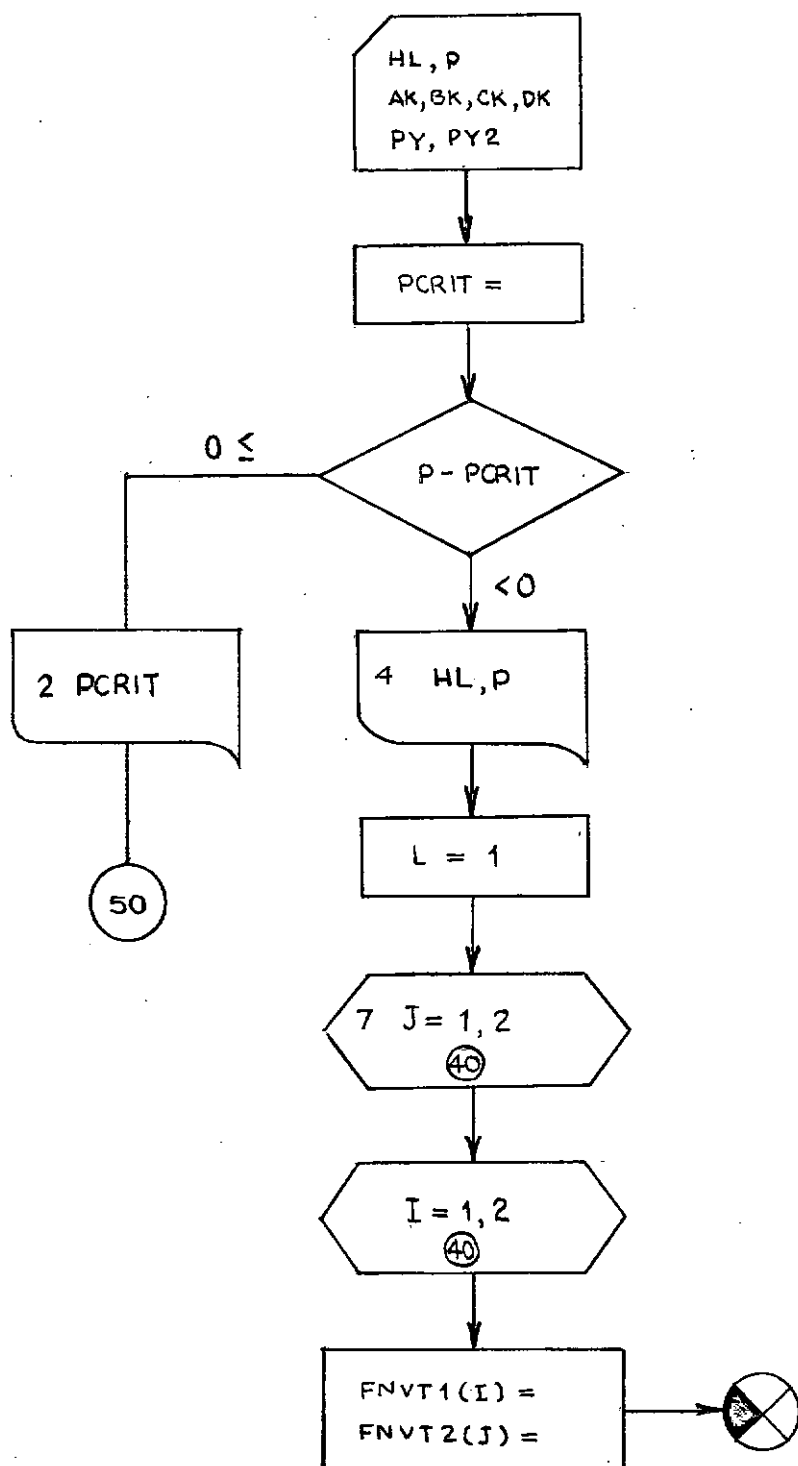
As variáveis assinaladas no programa por A(M,N), B(M,N), C(M,N), D(M,N), E(M,N) e F(M,N) correspondem ao cál-

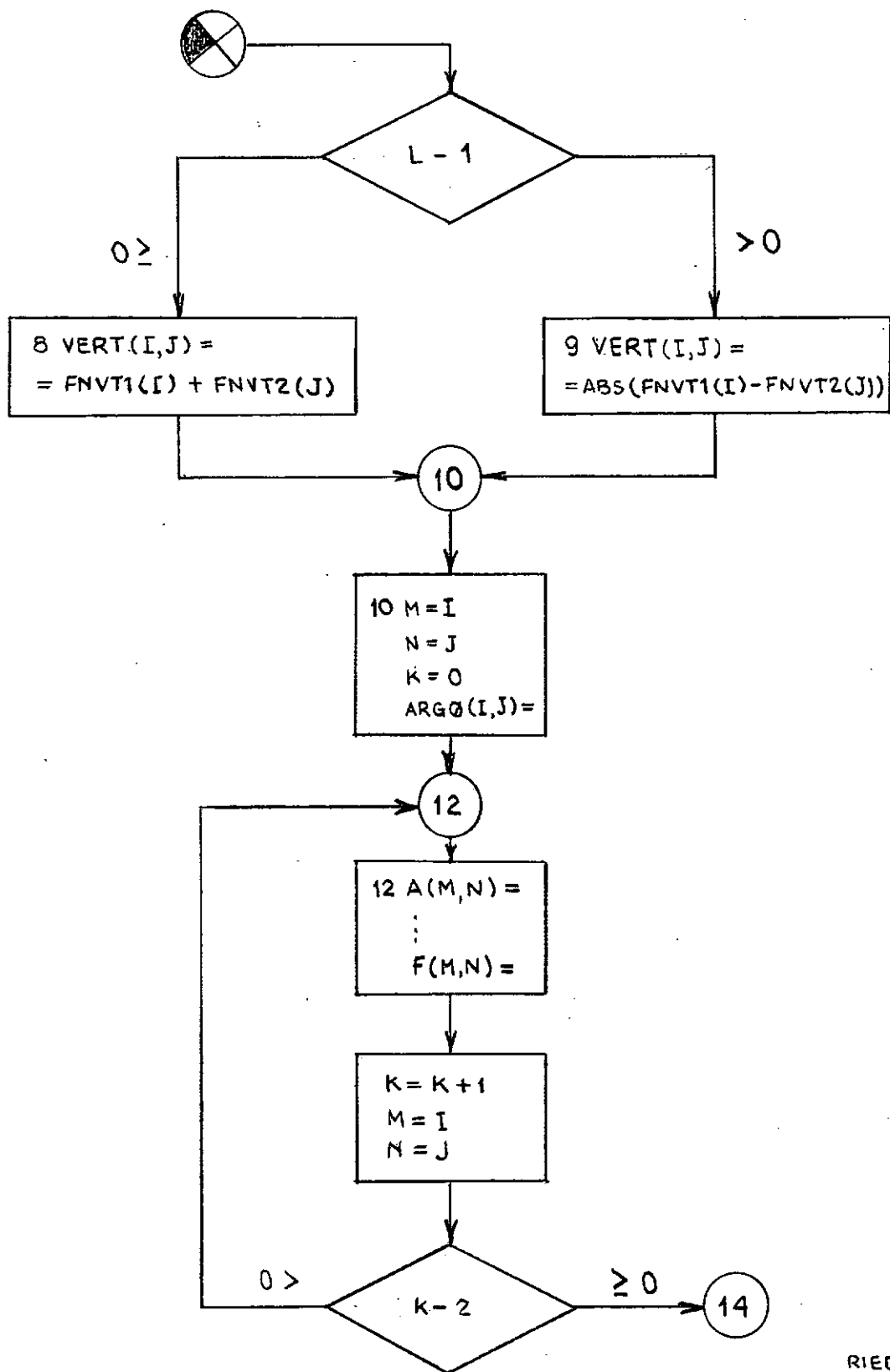
culo de $F_{rp}(M = I, N = J)$ e de $F_{rp}(M = J, N = I)$.

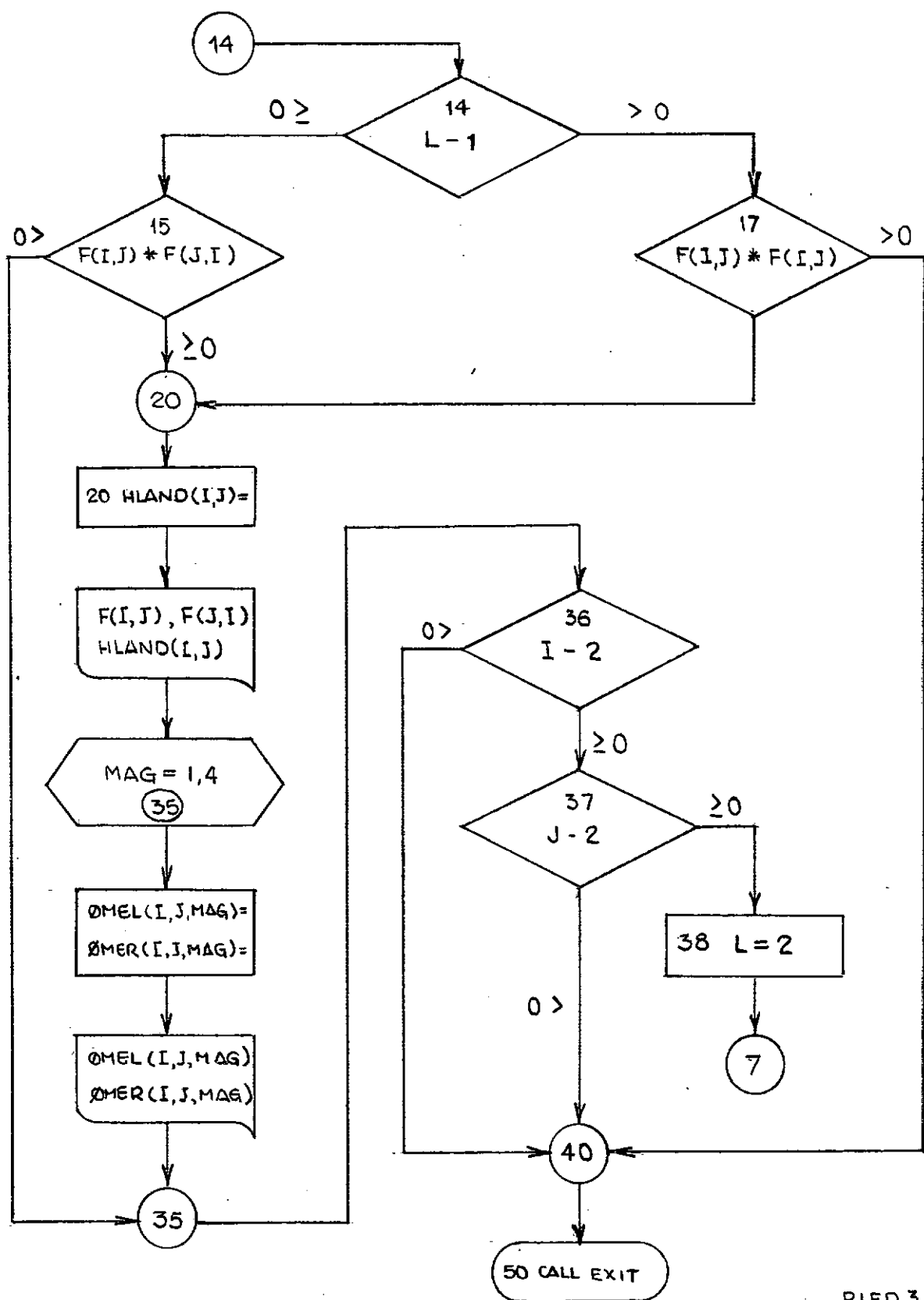
Deve-se atentar para os desvios realizados no programa conforme os casos de $F(I, J) * F(J, I)$ maiores ou menores que zero.

Nos programas RIED para o caso de vigas bi-engastadas à flexão e livres à torção, as variáveis $A(M, N)$, $B(M, N)$, $C(M, N)$, $D(M, N)$ e $F(M, N)$ devem ser expressões de acordo com (2.2.9). Para o caso de vigas bi-rotuladas à flexão e engastadas à torção, devemos expressar esses mesmos fatores de acordo com (2.3.17), bem como fazer $PY2 = PY$ (ver (2.3.13) e (2.3.19)).

PROGRAMA PARA DETERMINAÇÃO DAS RIED
DIAGRAMA DE BLOCOS







// JOB T 00FF 10FF

A 63

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FORTRAN

*LIST SOURCE PROGRAM

*IOCS(2501 READER,1403 PRINTER)

*EXTENDED PRECISION

C DETERMINACAO DAS REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
 C BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

```

  DIMENSION FNVT1(2),FNVT2(2),VERT(8,8),ARGO(8,8),
  1 A(8,8),B(8,8),C(8,8),D(8,8),E(8,8),F(8,8),HLAND(8,8),
  2 EPSLN(4),OMEL(4,4,4),OMER(4,4,4)

```

HL=3.50

P=4000.

AK=0.00064

BK=5460.

CK=0.25

DK=21840.

PY=3.141592

PY2=2*PY

PCRIT=(BK/CK)*(PY2/HL)**2

IF(P-PCRIT)4,2,2

2 WRITE(5,3)PCRIT

3 FORMAT(//,10X,'PCRIT=',F10.4)

GO TO 50

4 WRITE(5,5)HL,P

5 FORMAT(1H1,///,11X,'REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA',

1 1X,'VIGA',/,11X,'BI-ENGASTADA A FLEXAO -',

2 1X,'ENGASTADA A TORCAO',//,

3 11X,'HL=',F8.5,6X,'P=',F5.0)

L=1

7 DO 40 J=1,2

DO 40 I=1,2

FNVT1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)

FNVT2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)

IF(L-1)8,8,9

8 VERT(I,J)=FNVT1(I)+FNVT2(J)

GO TO 10

9 VERT(I,J)=ABS(FNVT1(I)-FNVT2(J))

10 M=I

N=J

K=0

ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL

12 A(M,N)=1./COS(ARGO(I,J))-1.

B(M,N)=(N**2)*(ARGO(I,J))**4

```

C(M,N)=12*PY**2*(N**2)*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
D(M,N)=16*PY**4*(N**4)*(N**2-M**2)
E(M,N)=(ARGO(I,J))**4-8*PY**2*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
1   +16*PY**4*(N**2-M**2)**2
F(M,N)=A(M,N)*(B(M,N)-C(M,N)+D(M,N))/E(M,N)
K=K+1
M=J
N=I
IF(K-2)12,14,14
14 IF(L-1)15,15,17
15 IF(F(I,J)*F(J,I))36,20,20
17 IF(F(I,J)*F(J,I))20,20,40
20 HLAND(I,J)=0.50*SQRT((F(I,J)*F(J,I))/(FNV1(I)*FNV2(J)))
WRITE(5,25)I,J,FNV1(I),FNV2(J),ARGO(I,J),
1   HLAND(I,J),F(I,J),F(J,I)
25 FORMAT(/,5X,'I=',I1,2X,'J=',I1,/,15X,
1   'FNV1(I)=' ,F9.4,4X,'FNV2(J)=' ,F9.4,4X,
2   //,15X,'ARGO(I,J)=' ,F7.4,5X,'HLAND(I,J)=' ,F7.4,
3   //,15X,'F(I,J)=' ,F11.6,6X,'F(J,I)=' ,F11.6)
WRITE(5,30)
30 FORMAT(/15X,'EPSLN',5X,'OMEL(I,J)',6X,'OMER(I,J)')
DO 35 MAG=1,4
NORD=MAG-1
EPSLN(MAG)=0.1*NORD
OMEL(I,J,MAG)=VERT(I,J)-EPSLN(MAG)*HLAND(I,J)
OMER(I,J,MAG)=VERT(I,J)+EPSLN(MAG)*HLAND(I,J)
WRITE(5,33)EPSLN(MAG),OMEL(I,J,MAG),OMER(I,J,MAG)
33 FORMAT(15X,F4.2,2(3X,F12.4))
35 CONTINUE
36 IF(I-2)40,37,37
37 IF(J-2)40,38,38
38 L=2
GO TO 7
40 CONTINUE
50 CALL EXIT
END

```

FEATURES SUPPORTED
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 2216 PROGRAM 1066

END OF COMPILATION

// XEQ

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL= 3.50000

P=4000.

I=1 J=1

FNVT1(I)=	231.2674	FNVT2(J)=	472.8707
ARGO(I,J)=	1.5772	HLAND(I,J)=	0.3544
F(I,J)=	-234.462029	F(J,I)=	-234.462029
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	704.1382	704.1382	
0.10	704.1028	704.1737	
0.20	704.0673	704.2091	
0.30	704.0319	704.2446	

I=2 J=2

FNVT1(I)=	945.7415	FNVT2(J)=	1901.6785
ARGO(I,J)=	6.3782	HLAND(I,J)=	0.0000
F(I,J)=	0.027821	F(J,I)=	0.027821
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	2847.4201	2847.4201	
0.10	2847.4201	2847.4201	
0.20	2847.4201	2847.4201	
0.30	2847.4201	2847.4201	

I=2 J=1

FNVT1(I)=	945.7415	FNVT2(J)=	472.8707
ARGO(I,J)=	1.0592	HLAND(I,J)=	0.0011
F(I,J)=	-0.409772	F(J,I)=	5.538384
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	472.8707	472.8707	
0.10	472.8706	472.8709	
0.20	472.8705	472.8710	
0.30	472.8704	472.8711	

I=1 J=2

FNVT1(I)=	231.2674	FNVT2(J)=	1901.6785
ARGO(I,J)=	3.7417	HLAND(I,J)=	0.0044
F(I,J)=	-10.792233	F(J,I)=	3.248100
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	1670.4110	1670.4110	
0.10	1670.4106	1670.4115	
0.20	1670.4101	1670.4119	
0.30	1670.4097	1670.4124	

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - LIVRE A TORCAO

HL= 3.50000

P=4000.

I=1 J=1

FNVT1(I)=	231.2674	FNVT2(J)=	472.8707
ARGO(I,J)=	1.5772	HLAND(I,J)=	0.1742
F(I,J)=	-115.238290	F(J,I)=	-115.238290
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	704.1382	704.1382	
0.10	704.1208	704.1557	
0.20	704.1034	704.1731	
0.30	704.0860	704.1905	

I=2 J=2

FNVT1(I)=	945.7415	FNVT2(J)=	1901.6785
ARGO(I,J)=	6.3782	HLAND(I,J)=	0.0001
F(I,J)=	0.279407	F(J,I)=	0.279407
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	2847.4201	2847.4201	
0.10	2847.4201	2847.4201	
0.20	2847.4201	2847.4201	
0.30	2847.4201	2847.4201	

I=2 J=1

FNVT1(I)=	945.7415	FNVT2(J)=	472.8707
ARGO(I,J)=	1.0592	HLAND(I,J)=	0.0019
F(I,J)=	-0.682564	F(J,I)=	9.739609
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	472.8707	472.8707	
0.10	472.8706	472.8709	
0.20	472.8704	472.8711	
0.30	472.8702	472.8713	

I=1 J=2

FNVT1(I)=	231.2674	FNVT2(J)=	1901.6785
ARGO(I,J)=	3.7417	HLAND(I,J)=	0.0016
F(I,J)=	5.427035	F(J,I)=	-0.874492
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	1670.4110	1670.4110	
0.10	1670.4109	1670.4112	
0.20	1670.4107	1670.4114	
0.30	1670.4105	1670.4115	

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ROTULADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL= 3.50000 P=4000.

I=1 J=1

FNVT1(I)=	52.3309	FNVT2(J)=	115.6337
ARGO(I,J)=	0.3762	HLAND(I,J)=	0.0003
F(I,J)=	0.056338	F(J,I)=	0.056338
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	167.9647	167.9647	
0.10	167.9646	167.9647	
0.20	167.9646	167.9647	
0.30	167.9645	167.9648	

I=2 J=2

FNVT1(I)=	231.2674	FNVT2(J)=	472.8707
ARGO(I,J)=	1.5772	HLAND(I,J)=	0.7014
F(I,J)=-	463.946814	F(J,I)=-	463.946814
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	704.1382	704.1382	
0.10	704.0681	704.2084	
0.20	703.9979	704.2785	
0.30	703.9278	704.3487	

I=2 J=1

FNVT1(I)=	231.2674	FNVT2(J)=	115.6337
ARGO(I,J)=	0.2590	HLAND(I,J)=	0.0083
F(I,J)=	-10.976553	F(J,I)=	0.677144
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	115.6337	115.6337	
0.10	115.6329	115.6345	
0.20	115.6320	115.6354	
0.30	115.6312	115.6362	

I=1 J=2

FNVT1(I)=	52.3309	FNVT2(J)=	472.8707
ARGO(I,J)=	0.9420	HLAND(I,J)=	0.0122
F(I,J)=	0.881903	F(J,I)=	-16.811032
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	420.5398	420.5398	
0.10	420.5386	420.5410	
0.20	420.5373	420.5422	
0.30	420.5361	420.5435	

4.2. DETERMINAÇÃO DOS COMPRIMENTOS CRÍTICOS DA VIGA

Conforme foi exposto na secção 3.3., item g, tais comprimentos (CCV) são aqueles para os quais ocorrem RIED amplas.

Para sua determinação, basta calcular as raízes L_{CR} da equação algébrica (ver (3.2.5)):

$$y(L) = (|\omega_{1r} \pm \omega_{2p}|) \frac{L}{c} - (n - 0,5)\pi = 0$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (4.2.1)$$

onde $\omega_{1r} + \omega_{2p}$ corresponde a $F_{rp} \cdot F_{pr} > 0$
 $|\omega_{1r} - \omega_{2p}|$ corresponde a $F_{rp} \cdot F_{pr} < 0$

O programa que segue, consta, basicamente, da determinação das raízes L_{CR} de (4.2.1) pelo método de Newton-Raphson.

Partindo de um valor dado L_1 , tem-se, por tal método, após K iterações,

$$L_{K+1} = L_K - \frac{y(L)}{y'(L)} \quad (4.2.2)$$

onde L_K tende para o valor da raiz L_{CR} quando K tende a infinito.

Praticamente, no entanto, pode-se considerar

$$L_{CR} \cong L_{K+1} \quad \text{desde que}$$

$$|y(L_{K+1}) - y(L_K)| < \delta \quad (4.2.3)$$

onde δ é um parâmetro pequeno escolhido convenientemente.

No programa que segue temos, além dos parâmetros e variáveis definidos no programa anterior, os abaixo relacionados

L_{CR}	_____	HLCR
L_K	_____	HL
L_{K+1}	_____	HL1
n	_____	MULT
$(n-0,5)\pi$	_____	RES0N
$y(L_{CR})$	_____	Y(I,J)
$y'(L_{CR})$	_____	DERY(I,J)

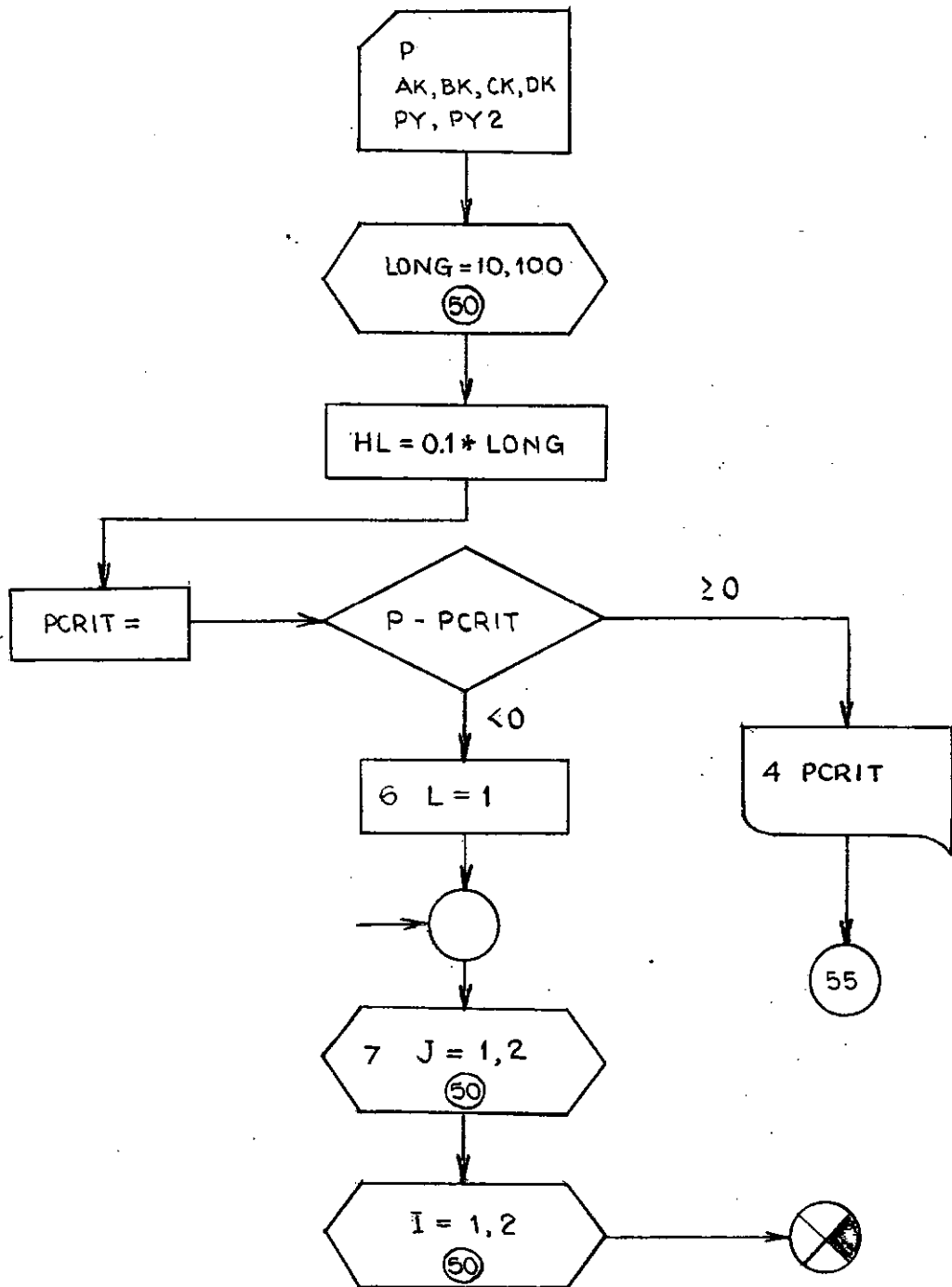
As demais variáveis tem seu significado esclarecido no próprio programa.

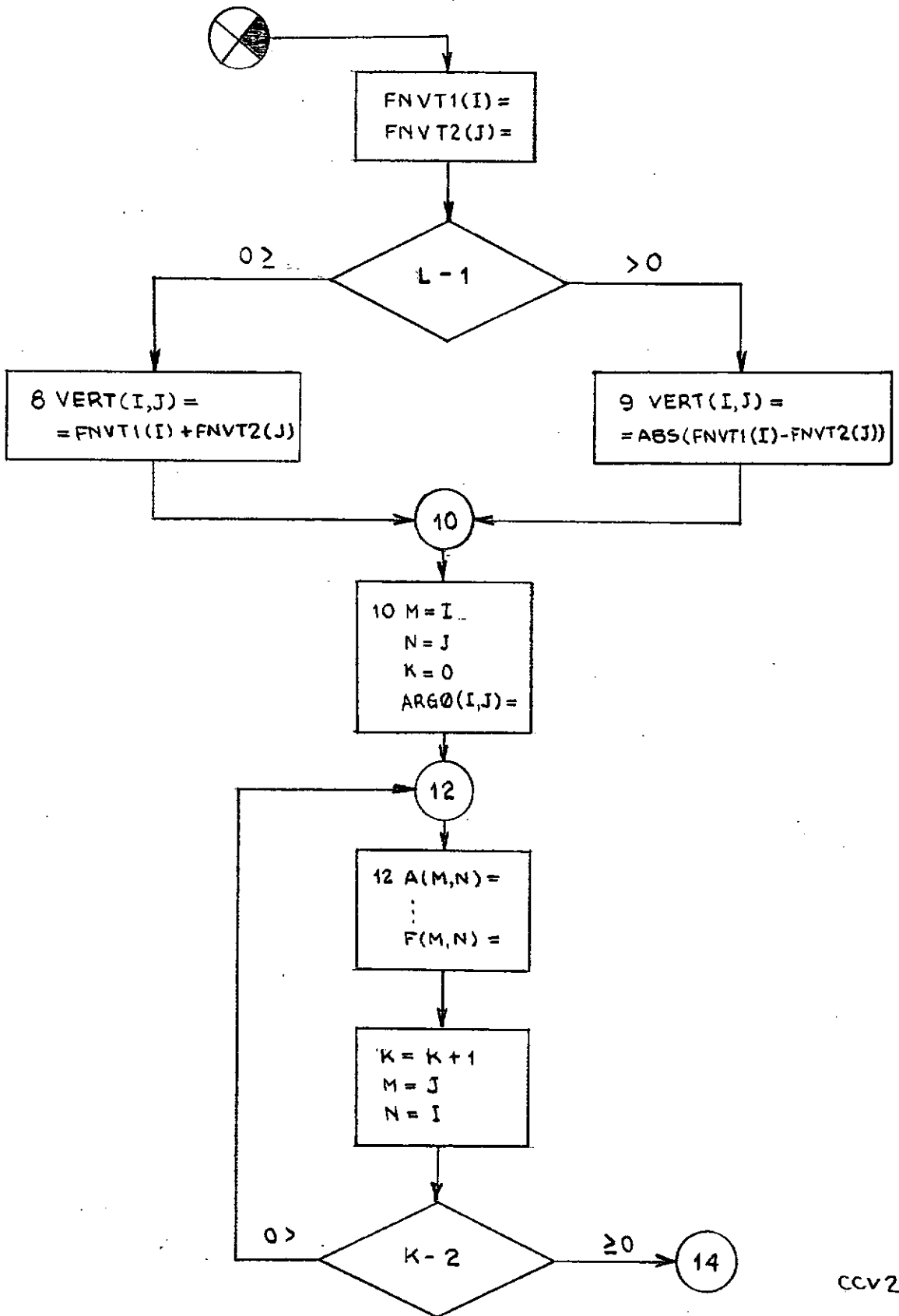
O programa para determinação dos CCV que apresentamos está adaptado para o caso de vigas bi-engastadas à flexão e engastadas à torção. Pesquisam-se os ' L_{CR} ' compreendidos entre 1 e 10 metros, para ' n ' de 1 a 4.

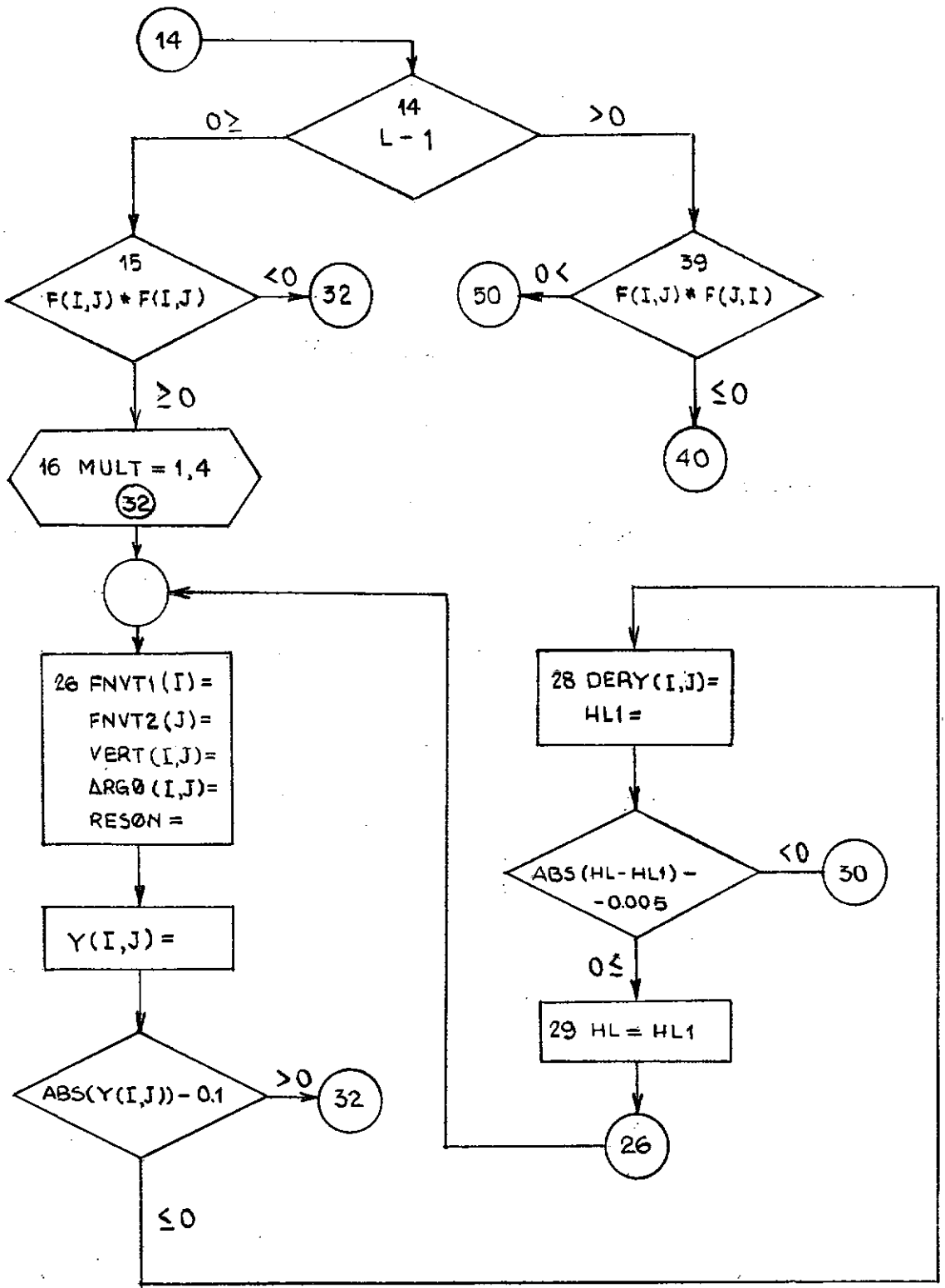
Por simples trocas de parâmetros podem ser obtidos valores para vigas com outras características construtivas.

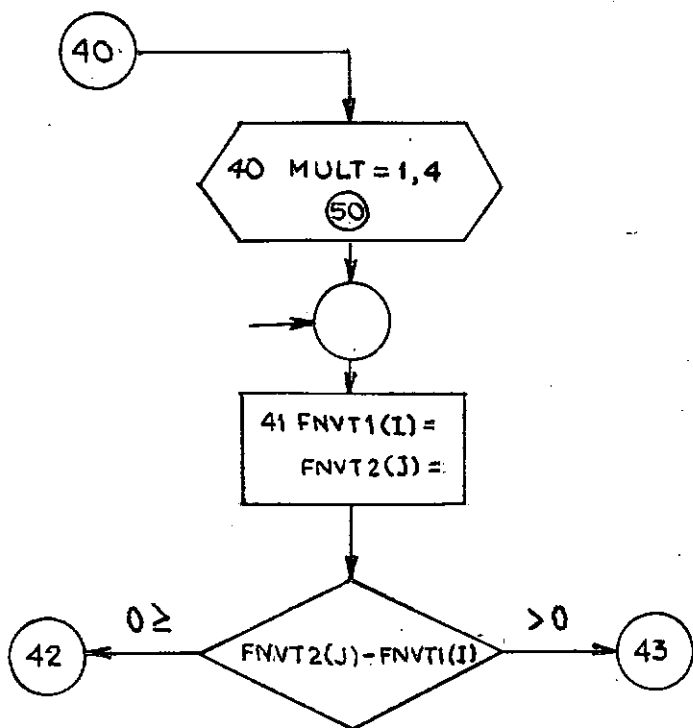
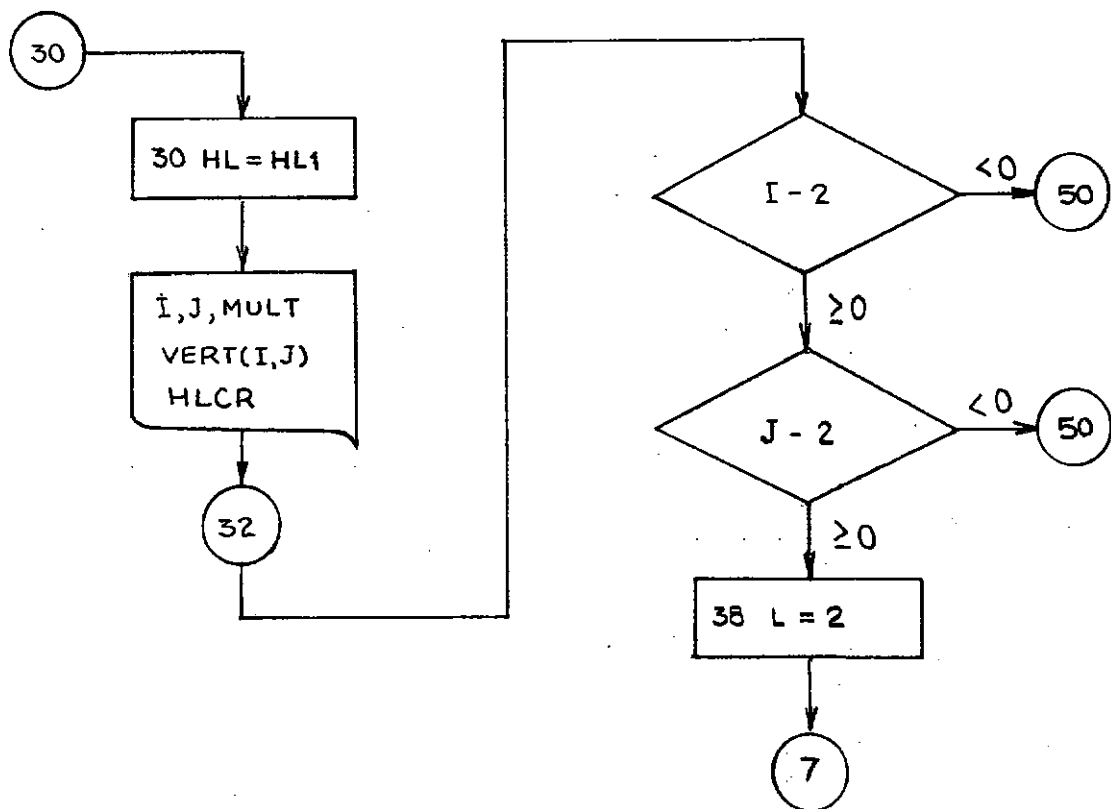
Em qualquer caso, obtem-se várias iterações para um mesmo L_{cr} , e um aspecto importante dêste programa é o conveniente ajustamento dos parâmetros de iteração.

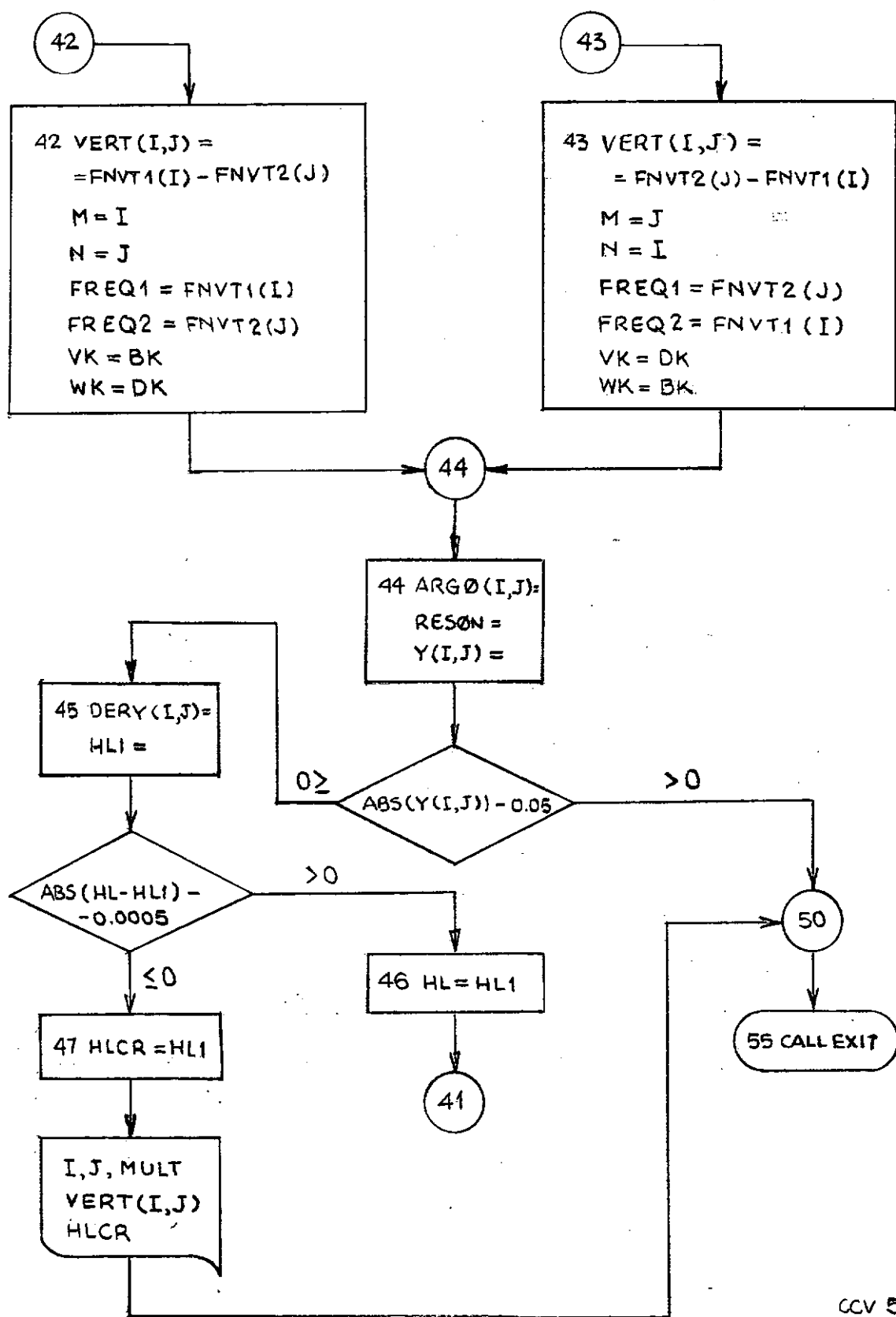
PROGRAMA PARA DETERMINAÇÃO DOS CCV
DIAGRAMA DE BLOCOS











// JOB T 00FF 10FF

A 63

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FORTRAN

*LIST SOURCE PROGRAM

*IOCS(2501 READER,1403 PRINTER)

*EXTENDED PRECISION

C DETERMINACAO DOS COMPRIMENTOS CRITICOS DA VIGA
 C BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

```

    DIMENSION FNVT1(8),FNVT2(8),VERT(8,8),ARGO(8,8),A(8,8),
1  B(8,8),C(8,8),D(8,8),E(8,8),F(8,8),Y(8,8),DERY(8,8)
    WRITE(5,1)
1  FORMAT(1H1,////,10X,'COMPRIMENTOS CRITICOS PARA A VIGA',
1  //,10X,'BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO')

    P=4000.
    AK=0.00064
    BK=5460.
    CK=0.25
    DK=21840.
    PY=3.141592
    PY2=2*PY

    DO 50 LONG=10,100
    HL=0.1*LONG
    PCRIT=(BK/CK)*(PY2/HL)**2
    IF(P-PCRIT)6,4,4
4  WRITE(5,5)PCRIT
5  FORMAT(//,10X,'PCRIT=',F10.4)
    GO TO 55
6  L=1
7  DO 50 J=1,2
    DO 50 I=1,2
    FNVT1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)
    FNVT2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)
    IF(L-1)8,8,9
8  VERT(I,J)=FNVT1(I)+FNVT2(J)
    GO TO 10
9  VERT(I,J)=ABS(FNVT1(I)-FNVT2(J))
10 M=I
    N=J
    K=0
    ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL
12 A(M,N)=1./COS(ARGO(I,J))-1.
    B(M,N)=(N**2)*(ARGO(I,J))**4
    C(M,N)=12*PY**2*(N**2)*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
    D(M,N)=16*PY**4*(N**4)*(N**2-M**2)

```

```

E(M,N)=(ARGO(I,J))**4-8*PY**2*(N**2+M**2)*(ARGO(I,J))**2
1      +16*PY**4*(N**2-M**2)**2
F(M,N)=A(M,N)*(B(M,N)-C(M,N)+D(M,N))/E(M,N)
K=K+1
M=J
N=I
IF(K-2)12,14,14
14 IF(L-1)15,15,39
15 IF(F(I,J)*F(J,I))32,16,16
16 DO 32 MULT=1,4
26 FNVT1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)
   FNVT2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)
   VERT(I,J)=FNVT1(I)+FNVT2(J)
   ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL
   RESON=(MULT-0.5)*PY
   Y(I,J)=ARGO(I,J)-RESON
   IF(ABS(Y(I,J))-0.1)28,28,32
28 DERY(I,J)=AK*(VERT(I,J)-
1      ((2*BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)/FNVT1(I))-
2      ((2*DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)/FNVT2(J)))
   HL1=HL-Y(I,J)/DERY(I,J)
   IF(ABS(HL-HL1)-0.0005)30,30,29
29 HL=HL1
   GO TO 26
30 HLCR=HL1
   WRITE(5,31)I,J,MULT,VERT(I,J),HLCR
31 FORMAT(/, 5X, 'I=', I1,4X, 'J=', I1,4X, 'MULT=', I1,4X,
1      'VERT(I,J)=' ,F9.4,4X, 'HLCR=' ,F7.5)
32 CONTINUE
   IF(I-2)50,37,37
37 IF(J-2)50,38,38
38 L=2
   GO TO 7
39 IF(F(I,J)*F(J,I))40,40,50
40 DO 50 MULT=1,4
41 FNVT1(I)=SQRT(BK*(PY2*I/HL)**4-CK*P*(PY2*I/HL)**2)
   FNVT2(J)=SQRT(DK*(PY2*J/HL)**4-CK*P*(PY2*J/HL)**2)
   IF(FNVT2(J)-FNVT1(I))42,42,43
42 VERT(I,J)=FNVT1(I)-FNVT2(J)
   M=I
   N=J
   FREQ1=FNVT1(I)
   FREQ2=FNVT2(J)
   VK=BK
   WK=DK
   GO TO 44
43 VERT(I,J)=FNVT2(J)-FNVT1(I)
   M=J
   N=I
   FREQ1=FNVT2(J)
   FREQ2=FNVT1(I)
   VK=DK
   WK=BK

```

```

44 ARGO(I,J)=AK*VERT(I,J)*HL
   RESON=(MULT-0.5)*PY
   Y(I,J)=ARGO(I,J)-RESON
   IF(ABS(Y(I,J))-0.05)45,45,50
45 DERY(I,J)=AK*(VERT(I,J)-
1      ((2*VK*(PY2*M/HL)**4-CK*P*(PY2*M/HL)**2)/FREQ1)-
2      ((2*WK*(PY2*N/HL)**4-CK*P*(PY2*N/HL)**2)/FREQ2))
   HL1=HL-Y(I,J)/DERY(I,J)
   IF(ABS(HL-HL1)-0.0005)47,47,46
46 HL=HL1
   GO TO 41
47 HLCR=HL1
   WRITE(5,48)I,J,MULT,VERT(I,J),HLCR
48 FORMAT(/, 5X, 'I=', I1, 4X, 'J=', I1, 4X, 'MULT=', I1, 4X,
1      'VERT(I,J)=' , F9.4, 4X, 'HLCR=' , F7.5)
50 CONTINUE
55 CALL EXIT
   END

```

FEATURES SUPPORTED
 EXTENDED PRECISION
 IJCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 2068 PROGRAM 1634

END OF COMPILATION

// XEQ

COMPRIMENTOS CRITICOS PARA A VIGA

BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

I=1	J=1	MULT=2	VERT(I,J)=6206.7807	HLCR=1.18660
<hr/>				
I=2	J=1	MULT=1	VERT(I,J)=1037.6456	HLCR=2.36773
I=2	J=1	MULT=1	VERT(I,J)=1034.0824	HLCR=2.37098
<hr/>				
I=1	J=2	MULT=2	VERT(I,J)=2650.8184	HLCR=2.77702
<hr/>				
I=1	J=1	MULT=1	VERT(I,J)= 698.4540	HLCR=3.51400
I=1	J=1	MULT=1	VERT(I,J)= 698.4747	HLCR=3.51400
I=1	J=1	MULT=1	VERT(I,J)= 698.4530	HLCR=3.51400
I=1	J=1	MULT=1	VERT(I,J)= 698.4631	HLCR=3.51400
<hr/>				
I=2	J=2	MULT=2	VERT(I,J)=1558.9724	HLCR=4.72328
I=2	J=2	MULT=2	VERT(I,J)=1558.8968	HLCR=4.72328
<hr/>				
I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)= 290.9505	HLCR=8.43678
I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)= 290.9301	HLCR=8.43689
I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)= 290.9531	HLCR=8.43676
I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)= 290.8738	HLCR=8.43720
I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)= 290.8758	HLCR=8.43719
I=1	J=2	MULT=1	VERT(I,J)= 290.8598	HLCR=8.43728
<hr/>				

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL= 3.51400

P=4000.

I=1 J=1

FNVT1(I)= 229.3729 FNVT2(J)= 469.0833

ARGO(I,J)= 1.5708 HLAND(I,J)= 584.9687

F(I,J)= -383759.164428 F(J,I)= -383759.164428

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	698.4562	698.4562
0.10	639.9594	756.9531
0.20	581.4625	815.4500
0.30	522.9656	873.9469



I=2 J=2

FNVT1(I)= 938.1666 FNVT2(J)=1886.5289

ARGO(I,J)= 6.3526 HLAND(I,J)= 0.0000

F(I,J)= 0.014825 F(J,I)= 0.014825

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	2824.6956	2824.6956
0.10	2824.6956	2824.6956
0.20	2824.6956	2824.6956
0.30	2824.6956	2824.6956

I=2 J=1

FNVT1(I)= 938.1666 FNVT2(J)= 469.0833

ARGO(I,J)= 1.0549 HLAND(I,J)= 0.0011

F(I,J)= -0.403195 F(J,I)= 5.456563

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	469.0833	469.0833
0.10	469.0831	469.0834
0.20	469.0830	469.0835
0.30	469.0829	469.0836

I=1 J=2

FNVT1(I)= 229.3729 FNVT2(J)=1886.5289

ARGO(I,J)= 3.7268 HLAND(I,J)= 0.0044

F(I,J)= -10.746450 F(J,I)= 3.199608

EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)
0.00	1657.1560	1657.1560
0.10	1657.1555	1657.1564
0.20	1657.1551	1657.1568
0.30	1657.1546	1657.1573

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL= 8.43750

P=4000.

I=1 J=1

FNVT1(I)=	33.5333	FNVT2(J)=	78.4955
ARGO(I,J)=	0.6049	HLAND(I,J)=	0.0031
F(I,J)=	0.323898	F(J,I)=	0.323898
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	112.0288	112.0288	
0.10	112.0285	112.0292	
0.20	112.0282	112.0295	
0.30	112.0279	112.0298	

I=2 J=2

FNVT1(I)=	156.9911	FNVT2(J)=	324.4060
ARGO(I,J)=	2.5995	HLAND(I,J)=	0.0289
F(I,J)=	-13.050869	F(J,I)=	-13.050869
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	481.3972	481.3972	
0.10	481.3943	481.4000	
0.20	481.3914	481.4029	
0.30	481.3885	481.4058	

I=2 J=1

FNVT1(I)=	156.9911	FNVT2(J)=	78.4955
ARGO(I,J)=	0.4238	HLAND(I,J)=	0.0005
F(I,J)=	-0.033267	F(J,I)=	0.517488
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	78.4955	78.4955	
0.10	78.4954	78.4956	
0.20	78.4954	78.4956	
0.30	78.4953	78.4957	

I=1 J=2

FNVT1(I)=	33.5333	FNVT2(J)=	324.4060
ARGO(I,J)=	1.5707	HLAND(I,J)=	90.4754
F(I,J)=	63312.530258	F(J,I)=	-5625.975717
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	290.8727	290.8727	
0.10	281.8252	299.9203	
0.20	272.7776	308.9678	
0.30	263.7301	318.0154	

←

REGIOES DE INSTABILIDADE ELASTICA DA VIGA
BI-ENGASTADA A FLEXAO - ENGASTADA A TORCAO

HL= 2.37100

P=4000.

I=1 J=1

FNVT1(I)=	512.0995	FNVT2(J)=	1034.4328
ARGO(I,J)=	2.3467	HLAND(I,J)=	0.0025
F(I,J)=	-3.685462	F(J,I)=	-3.685462
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	1546.5324	1546.5324	
0.10	1546.5321	1546.5326	
0.20	1546.5318	1546.5329	
0.30	1546.5316	1546.5331	

I=1 J=2

FNVT1(I)=	512.0995	FNVT2(J)=	4147.9022
ARGO(I,J)=	7.0712	HLAND(I,J)=	0.0014
F(I,J)=	4.375373	F(J,I)=	4.135347
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	4660.0017	4660.0017	
0.10	4660.0016	4660.0019	
0.20	4660.0014	4660.0020	
0.30	4660.0013	4660.0022	

I=2 J=2

FNVT1(I)=	2068.8657	FNVT2(J)=	4147.9022
ARGO(I,J)=	9.4335	HLAND(I,J)=	0.0021
F(I,J)=	-12.656213	F(J,I)=	-12.656213
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	6216.7680	6216.7680	
0.10	6216.7678	6216.7682	
0.20	6216.7676	6216.7684	
0.30	6216.7673	6216.7686	

I=2 J=1

FNVT1(I)=	2068.8657	FNVT2(J)=	1034.4328
ARGO(I,J)=	1.5696	HLAND(I,J)=	0.4858
F(I,J)=	-423.626692	F(J,I)=	4769.318395
EPSLN	OMEL(I,J)	OMER(I,J)	
0.00	1034.4328	1034.4328	
0.10	1034.3843	1034.4814	←
0.20	1034.3357	1034.5300	
0.30	1034.2871	1034.5786	

LISTA DE SÍMBOLOS

- c - velocidade de propagação das ondas torcionais
 D_{rp} - parâmetro relativo ao momento axial constante de excitação
 E - módulo de elasticidade longitud. do material da viga
 F_{rp} - parâmetro relativo ao momento axial harmônico de excitação
 G - módulo de elasticidade transvers. do material da viga
 I_p - momento de inércia polar da secção transversal da viga
 $\left. \begin{matrix} I_y \\ I_1 \end{matrix} \right\}$ - momento de inércia principal da superfície transversal da viga em relação ao eixo dos y
 $\left. \begin{matrix} I_z \\ I_2 \end{matrix} \right\}$ - momento de inércia principal da superfície transversal da viga em relação ao eixo dos z
 J_p - momento de inércia mássico em relação ao eixo dos x (baricêntrico) por unidade de comprimento da viga
 k - coeficiente dependente da forma da secção transversal da viga
 K - energia cinética
 L - comprimento da viga
 L_{CR} - comprimento crítico à ressonância paramétrica da viga
 M - momento interno da viga
 $M_{x'}$ - momento torçor da viga
 $M_{y'}$ - momento fletor da viga no plano de XOY

- M_z - momento fletor da viga no plano XOZ
 m - massa por unidade de comprimento da viga
 P - força axial de excitação (constante)
 $P_{crit.}$ - carga crítica à flambagem da viga
 $\left. \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right\}$ - ordem dos modos das vibrações flexionais da viga
 $q(t)$ - coordenadas generalizadas das vibrações flexionais da viga
 $T(t)$ - momento axial periódico de excitação
 T_0 - momento axial constante de excitação
 T_1 - amplitude do momento axial harmônico de excitação
 $u(t)$ - função degrau unitário
 V - energia potencial elástica
 W - trabalho não conservativo
 $\left. \begin{matrix} x, y \\ z, w \end{matrix} \right\}$ - coordenadas espaciais da linha neutra da viga
 β - parâmetro relativo ao momento axial constante de excitação
 δ - variação de uma determinada variável
 $\delta(x)$ - função delta de Dirac
 ϵ - parâmetro pequeno relativo à excitação momento axial harmônico
 $\eta(t)$ - coordenadas generalizadas das vibrações torcionais da viga
 Θ - coordenada do deslocamento torcional da viga
 γ - autovalor associado às vibrações torcionais da viga

ρ - massa específica do material da viga

Ω - frequência do momento axial harmônico de excitação

Ω_R - idem acima, parametricamente ressonantes

ω_{1r} - frequências naturais das vibrações transversais da viga
no plano XOY

ω_{2p} - idem acima, no plano XOZ.

B I B L I O G R A F I A

1. BELIAEV, N.M., "Stability of Prismatic Rods Subject to Variable Longitudinal Forces", Collection Engineering Construction and Structural Mechanics, págs. 149-167, Put', Leningrado, 1924.
2. BIEZENO, C.B. & R. GRAMMEL, "Engineering Dynamics" , vol. II, (tradução do original alemão) Blackie & Sons, Londres, 1955.
3. BOLOTIN, V.V., "The Dynamic Stability of Elastic Systems", (tradução do original russo, Gostekhizdat, Moscou, 1956), Holden-Day, San Francisco, 1964.
4. EVAN-IWANOWSKY, R.M., "On the Parametric Response of Structures", Appl. Mech. Rev., vol. 18, págs. 699-702, 1965.
5. FUNG, Y.C., "Foundations of Solid Mechanics" , Prentice-Hall of India, N. Delhi, 1968.
6. GOLDSTEIN, H., "Classical Mechanics", Addison-Wesley, Reading-Mass., 1950.

7. GROEBNER, W. & N.HOFREITER, "Integraltafel", vol. 1, "Unbestimmte Integrale", Springer Verlag, Viena, 1950.
8. HAGEDORN, P.B. & KOVAL, "On the Parametric Stability of a Timoshenko Beam Subjected to a Periodic Axial Load" (em impressão).
9. HAGEDORN, P.B., "On the Lateral Buckling of a Beam Subjected to the Reaction of a Pulsating Fluid Jet", COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1970.
10. HILDEBRAND, F.B., "Methods of Applied Mathematics", Prentice-Hall of India, N. Delhi, 1968.
11. HSU, C.S., "On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom", J. Appl. Mech., ASME, vol. 30, págs 367-372, 1963.
12. HSU, C.S., "Further Results on Parametric Excitation of a Dynamic System", J. Appl. Mech., ASME, vol.32, págs. 373-317, 1965.
13. LEVINSON, M., "Application of the Galerkin and Ritz Methods to Nonconservative Problems of Elastic Stability", Z. angew. Math. Physic, vol. 17, págs. 431-442, 1966.

14. MEIROVITCH, L., "Analytical Methods in Vibrations",
McMillan, N.York, 1967.
15. METTLER, E., "Eine Theorie der Stabilität der elastischen
Bewegung", Ingenieur Archiv, vol. 16, págs. 135-156,
1947.
16. METTLER, E., "Allgemeine Theorie der Stabilität erzwun -
gener Schwingungen elastischer Körper", Ingenieur Archiv,
vol. 17, págs. 418-449, 1949.
17. METTLER, E., "Combination Resonances in Mechanical Sys -
tems under Harmonic Excitation", Proc. Fourth Conf. on
Nonlin. Osc. (Praga, 1967), págs. 51-70, Academia, Praga
1968.
18. PACITTI, T., "Princípios de FORTRAN", Ao Livro Técnico,
Rio de Janeiro, 1970.
19. PIPES, L.A., "Applied Mathematics for Engineers and Phy -
sicists", McGraw-Hill ISE, Tóquio, 1958.
20. STRUBLE, R.A., "Nonlinear Differential Equations",
N. York, 1962.

21. TIMOSHENKO, S. & J. GERE, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, N. York, 1961.
22. TIMOSHENKO, S. & J. GOODIER, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1951.
23. WEINSTOCK, R., "Calculus of Variations", McGraw-Hill, N. York, 1952.
24. WYLIE JR., C.R., "Advanced Engineering Mathematics" , McGraw-Hill ISE, Tóquio, 1966.
25. ZIEGLER, H., "On the Elastic Stability", Adv. in Appl. Mech., vol. IV, págs. 351-403, 1956.